

الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي

الدكتور
محمد حسين محمد رشيد



رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2007 / 4 / 958)

519.53

رشيد، محمد

الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي / محمد حسين رشيد.-
عمان: دار صفاء، 2007.

() ص

ر . أ (2007 / 4 / 958)

الواصفات : الإحصاء الوصفي /

* تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

حقوق الطبع محفوظة للناس

Copyright ©
All rights reserved

الطبعة الأولى

2008 م - 1428 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع النخيم التجاري - هاتف وفاكس 4612190

ص.ب 922762 عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

<http://www.darsafa.com>

E-mail : safa@darsafa.com

ردمك 0-277 - 24 - 9957 - 978 - ISBN

الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي

تأليف

محمد حسين محمد رشيد

الطبعة الأولى
2008 م - 1428 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المحتويات

المقدمة ١١

الوحدة الأولى مقدمة لدراسة الإحصاء

- (١-١) تعريف علم الإحصاء ١٥
- (١-١-١): أهمية دراسة الإحصاء ١٦
- (١-١-٢): الفئات المهمة بدراسة ١٧
- (٢-١) جمع البيانات ١٧
- (١-٢-١): مصادر جمع البيانات ١٧
- (٢-٢-١): تصميم الاستبيان ١٩
- (٣-١) تصنيف البيانات ٢٠
- (٤-١) طرق جمع البيانات ٢١
- (٥-١) أنواع العينات ٢٢
- (٦-١) أنواع المتغيرات الإحصائية ٢٦
- تمارين الوحدة الأولى ٢٨

الوحدة الثانية عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية

- (١-٢) عرض البيانات الإحصائية ٣٦
- (٢-٢) التوزيعات التكرارية ٣٨
- (١-٢-٢): بناء التوزيع التكراري ٣٩
- (٢-٢-٢): أنواع الجداول التكرارية ٤٥

- ٤٦ _____ (٣-٢): التوزيع التكراري المتجمع
- ٥٠ _____ (٣-٢) تمثيل الجداول التكرارية بيانياً
- ٥٣ _____ (٤-٢) تمثيل التوزيعات التراكمية (المتجمعة) بيانياً
- ٥٧ _____ (٥-٢) أشكال التوزيعات التكرارية
- ٦٠ _____ تمارين الوحدة

الوحدة الثالثة مقاييس النزعة المركزية

- ٦٧ _____ - مفهوم النزعة المركزية
- ٦٧ _____ (١-٣) الوسط الحسابي
- ٧٧ _____ (٢-٣) الوسيط
- ٨٥ _____ (٣-٣) المنوال
- ٨٩ _____ (٤-٣): العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال
- ٩١ _____ (٥-٣): خصائص مقاييس النزعة المركزية
- ٩٦ _____ (٦-٣): المثنيات والربيعات والعشيرات
- ٩٦ _____ (١-٦-٣): المثنيات
- ١٠٣ _____ (٢-٦-٣): الربيعات
- ١٠٤ _____ (٣-٦-٣): العشيرات
- ١٠٦ _____ (٧-٣): الرتب المثنية
- ١٠٩ _____ (٨-٣) مسائل محلولة
- ١١١ _____ تمارين الوحدة

الوحدة الرابعة مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتطرف

- ١١٥ _____ (١-٤) المدى

١١٦	(٢-٤) نصف المدى الربيعي
١١٧	(٣-٤) الانحراف المتوسط
١١٩	(٤-٤) الانحراف المعياري
١٢٥	(٥-٤) التباين
١٢٥	(٦-٤) أثر التحويلات الخطية على مقياس التشتت
١٢٧	(٧-٤) صفات مقياس التشتت
١٢٩	(٨-٤) مقياس التشتت النسبية
١٣٠	(١-٨-٤) معامل التغير
١٣٦	(٢-٨-٤) القيمة المعيارية
١٣٤	(٩-٤) العزوم
١٣٨	(١٠-٤) مقياس الإلتواء
١٤٠	(١١-٤) مقياس التفرطح
١٤٢	(١٢-٤) مسائل محلولة
١٤٨	- تمارين الوحدة

الوحدة الخامسة الارتباط والانحدار

١٥٥	مقدمة
١٥٦	(١-٥) الارتباط
١٥٨	(٢-٥) معامل الارتباط بيرسون
١٦١	(٣-٥) أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط
١٦٢	(٤-٥) معامل الارتباط للترتب
١٦٦	(٥-٥) تحليل الانحدار

- ١٧٣ (٦-٥) العلاقة بين معامل الارتباط بيرسون وبين معاملات خطي الانحدار _
- ١٧٤ (٧-٥) مسائل محلولة _____
- ١٨٠ (٨-٥) تمارين عامة على الوحدة _____

الوحدة السادسة

الاحتمالات

- ١٨٥ مقدمة _____
- ١٨٥ (١-٦) فضاء العينة والأحداث _____
- ١٨٧ (٢-٦) خواص الاحتمالات _____
- ١٩٠ (٣-٦) الفضاء العيني المنتظم _____
- ١٩٢ (٤-٦) التباديل _____
- ١٩٤ (٥-٦) التوافيق _____
- ٢٠٠ (٦-٦) الحوادث المشروطة واحتمالاتها _____
- ٢٠٦ (٧-٦) الحوادث المستقلة واحتمالاتها _____
- ٢٠٧ (٨-٦) المتغيرات العشوائية _____
- ٢١٠ (٩-٦) توزيع ذات الحدين _____
- ٢١٣ (١٠-٦) مسائل محلولة _____
- ٢٢٢ تمارين الوحدة _____

الوحدة السابعة

التوزيع الطبيعي

- ٢٢٧ تعريف _____
- ٢٢٧ (١-٧) خواص التوزيع الطبيعي _____
- ٢٢٧ (٢-٧) التوزيع الطبيعي المعياري _____

(٧-٢-١) كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول

- ٢٢٩ _____ التوزيع الطبيعي المعياري
- ٢٤١ _____ (٧-٢-٢) كيفية استخراج العلامة المعيارية (ز) إذا علمت المساحة
- ٢٥٢ _____ تمارين الوحدة

الوحدة الثامنة

الأرقام القياسية

- ٢٥٧ _____ (٨-١) مفهوم الرقم القياسي
- ٢٥٧ _____ (٨-٢) الأساس والمقارنة
- ٢٥٨ _____ (٨-٣) أهمية الأرقام القياسية واستعمالاتها
- ٢٥٩ _____ (٨-٤) طرق تركيب الأرقام القياسية
- ٢٥٩ _____ (٨-٤-١) الأرقام القياسية البسيطة
- ٢٦٢ _____ (٨-٤-٢) الأرقام القياسية المرجحة
- ٢٦٨ _____ تمارين الوحدة

الوحدة التاسعة

السلاسل الزمنية

- ٢٧٣ _____ مقدمة
- ٢٧٤ _____ (٩-١) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة
- ٢٧٧ _____ (٩-٢) تحليل السلسلة الزمنية
- ٢٨٠ _____ (٩-٣) طرق تقدير الاتجاه العام
- ٢٨٨ _____ (٩-٤) تقدير التغيرات الموسمية
- ٢٩٣ _____ تمارين الوحدة

الوحدة العاشرة
الإحصاءات الحيوية والسكانية

- ٢٩٧ _____ (١-١٠) الإحصاءات الحيوية
- ٢٩٧ _____ (١-١-١٠) إحصاءات المواليد
- ٢٩٨ _____ (٢-١-١٠) الخصوبة
- ٣٠١ _____ (٣-١-١٠) إحصاءات الوفيات
- ٣٠٢ _____ (٤-١-١٠) الإحصاءات الصحية
- ٣٠٤ _____ (٥-١-١٠) إحصاءات التحرك السكاني
- ٣٠٥ _____ (٦-١-١٠) إحصاءات الزواج والطلاق
- ٣٠٦ _____ (٧-١-١٠) إحصاءات المرض
- ٣٠٧ _____ (٢-١٠) تعداد السكان
- ٣٠٧ _____ (٣-١٠) مقاييس النمو السكاني
- ٣١٢ _____ تمارين الوحدة
-
- ٣١٥ _____ أسئلة عامة
- ٣٣٣ _____ المراجع
- ٣٣٥ _____ الملاحق

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الخلق محمد بن عبد الله
صلى الله عليه وسلم.
أما بعد:

تكمن أهمية دراسة الإحصاء بأنه وسيلة وليست غاية، لذلك أصبح علم
الإحصاء يستعمل كوسيلة لتحليل المشكلات بشكل موضوعي ولخدمة العلماء في
شتى مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بأدوات تحليلية تساعد على تحقيق فهم
أفضل للأوضاع القائمة سواء في المشروع أو المجتمع أو شتى مجالات الحياة.

ونظراً لافتقار المكتبة العربية إلى الكتب العلمية في مختلف العلوم، وكما أن
الدراسة في جامعاتنا العربية ما زالت تدرس بلغة غريبة عن طلبةنا فقد جاء هذا
الكتاب يسد ولو جزءاً بسيطاً من هذه الحاجة. فجاء تناولي لهذا الكتاب بشمولية
وتفصيلاً فطرحنا الأمثلة العديدة والمتنوعة بمختلف المستويات لتأتي مليئة لجميع
مستويات الطلبة.

فجاء الكتاب في عشرة فصول حيث تناول الفصل الأول تعريف علم الإحصاء
وأهميته وكيفية جمع البيانات... الخ، أما في الفصل الثاني فقد تناولنا موضوع عرض
البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية، وفي الثالث تم تناول موضوع مقاييس
النزعة المركزية وفي الرابع تناولنا موضوع مقاييس التشتت أما الانحدار والارتباط فتم
تناوله في الخامس وفي الفصل السادس تم تناول موضوع الاحتمال، وفي السابع
موضوع التوزيع الطبيعي، وفي الفصل الثامن تناولنا الأرقام القياسية وفي التاسع
تناولنا السلاسل الزمنية وفي الفصل الأخير تناولنا الإحصاءات الحيوية والسكانية.
وأتمنجه بالشكر الجزيل لكل من ساهم في إعداد هذا الكتاب سواء عن طريق

الملاحظات أو بالدعم المعنوي، كذلك أتوجه بالشكر إلى مكتب روعة للطباعة على ما بذلوه أثناء طباعة هذه الملاحظة.

وأخيراً لا ندعي الكمال في هذا العمل، لذا أتوجه من زملائي المدرسين وأحبي الطلبة لتزويدي بأية ملاحظات واقتراحات لتلافيتها في الطبعة القادمة.

المؤلف

جامعة البلقاء التطبيقية - كلية الكرك

قسم العلوم الأساسية

١٧ ذو الحجة سنة ١٤٢٢ هجري

الموافق ١ آذار سنة ٢٠٠٢ ميلادي

الوحدة الأولى

مقدمة لدراسة الإحصاء

(١-١) تعريف علم الإحصاء.

(١-١-١): أهمية دراسة الإحصاء.

(٢-١-١) : الفئات المهمة بدراسة.

(٢-١) جمع البيانات:

(١-٢-١): مصادر جمع البيانات.

(٢-٢-١) : تصميم الاستبيان.

(٣-١) تصنيف البيانات.

(٤-١) طرق جمع البيانات.

(٥-١) أنواع العينات.

(٦-١) أنواع المتغيرات الإحصائية.

تمارين الوحدة الأولى.

مقدمة لدراسة الإحصاء

(١-١) علم الإحصاء:

ما هو علم الإحصاء ما أهمية دراسته وما هي الفئات المهمة به هذا ما سنتناوله في هذا البند

فعلم الإحصاء هو "العلم الذي يبحث في جمع البيانات وعرضها وتبويبها وتحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير أو التحقق".

فعلم الإحصاء كبقية العلوم لأنه يمتاز بالمراحل الأربعة التي تمتاز بها بقية العلوم وهي:

١- **الملاحظة أو الملاحظة:** فعالم أو الباحث يشاهد ويلاحظ ما يحدث ويجمع الحقائق المتعلقة بالمشكلة التي يود أن يبحثها.

٢- **الفرضية:** لتفسير الحقائق للمشاهدة إذ يريد العالم أن يفسر الظاهرة التي شاهدها على شكل تخمينات تسمى فرضية أي بمعنى يخمن ويفترض تفسيراً للظاهرة.

٣- **التنبؤ:** يستنتج العالم من فرضياته بعض الحقائق الجديدة والتي يمكن اعتبارها معرفة جديدة (يطلق عليها اسم التنبؤ).

٤- **التحقق:** وهي مرحلة التأكد من صحة الفرضية التي فسر بها المشكلة.

ويقسم علم الإحصاء إلى قسمين رئيسيين هما:

١- **الإحصاء الوصفي:** وهو الإحصاء الذي يهتم بجمع البيانات وتبويبها وعرضها ثم إجراء الحسابات اللازمة للوصول إلى المقاييس المختلفة التي تبرز الخصائص الأساسية ويهدف الإحصاء الوصفي إلى تقليد معالم المجتمع الإحصائي للوصول إلى استنتاجات.

٢- **الإحصاء الاستدلالي:** وهو الإحصاء الذي يهتم بتحليل البيانات

واستخدام النتائج ثم تفسيرها واستعمالها لاتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد أي اتخاذ أفضل قرار ممكن عندما تكون المعلومات المتوافرة غير كافية لذلك يطلق عليه البعض "علم القرارات" ويبدأ حين ينتهي الإحصاء الوصفي.

الطريقة الإحصائية:

"هي مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تستخدم في جمع البيانات وتبويبها وعرضها واستخلاص النتائج وتفسيرها." لذلك فإن الطريقة الإحصائية تتكون من عناصر تعتبر وسائل وأدوات هامة في البحث العلمي والعناصر هي:

١- جمع البيانات: وهي عملية الحصول على القياسات أو التعدادات أو قيم المشاهدات للتجارب التي يجريها الباحث وكلما كانت دقيقة كلما كانت النتائج أدق.

٢- تبويب (تنظيم) البيانات وعرضها: يتم تبويب البيانات طبقاً لأسلوب تصنيف محدد مسبقاً وعرضها بطرق مناسبة كالجداول، الأشكال البيانية والهندسية.

٣- وصف البيانات عن طريق إبراز الخصائص الأساسية لها والتي يمكن التعبير عنها بمقاييس معينة والخصائص الأساسية لأي مجموعة من البيانات هي: (أ) الشكل (ب) النزعة المركزية (ج) التشتت.

٤- تحليل النتائج: وهو إظهار الخصائص الأساسية على شكل أرقام والتي يهم الباحث الحصول عليها للوصول إلى نتائج محددة.

٥- استقرار النتائج واتخاذ القرارات: وهي مجموعة الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من تحليل النتائج وهي غالباً ما تكون على شكل تقديرات أو تنبؤات أو تعميمات أو قرارات رفض أو قبول للفرضيات الإحصائية.

(١-١-١) أهمية دراسة الإحصاء:

تكمن أهمية الإحصاء في حقيقة بأنه وسيلة لا غاية وفي الحقيقة فإن الإحصاء يلعب دوراً هاماً في:

١- المساعدة في تخلص البيانات واستخلاص النافع منها.

٢- المساعدة في اكتشاف نماذج في البيانات.

٣- المساعدة في تخطيط وتصميم التجارب وعمل المسح الإحصائي.

- ٤- يساعد في اختيار أسلوب معين في البحث ويساعد على التفاهم بين العلماء.
- ٥- يساعد على كيفية استخدام نتائج البحث الإحصائي إذ تستخدم النتائج في النواحي التالية:

أ - التنبؤ أو استخدام النتائج في تقدير رقمي لبيان غير معروف بالتحديد وقد يكون هذا لفترات زمنية مستقبلية أو ماضية.

ب- اتخاذ قرار محدد اتجاه المشكلة واتخاذ القرار ما هو إلا عملية اختيار البديل المناسب من عدة بدائل.

ج- التحقق: التثبت من صحة أو عدم صحة فرضية ما.

د - الرقابة: على مدى الجودة في الصناعة بالإضافة إلى الرقابة الكمية فيها.

(١-٢) الفئات المهمة بدراسة الإحصاء:

أصبح الإحصاء في الزمن الحاضر يستعمل كوسيلة عملية لتحليل المشكلات موضوعياً وخلفية العاملين في شتى مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بأدوات تحليلية تساعدهم على تحقيق فهم أفضل للأوضاع القائمة سواء في المشروع أو المجتمع أو شتى مجالات الحياة وبالتالي يستطيعون الوصول لأفضل قرار الذي يساعدهم في الرقابة والتنبؤ للمستقبل والتخطيط له وأصبح الإحصاء يطبق في مختلف العلوم الطبية والهندسية والطبيعية والاقتصادية والإدارية، لذلك فإننا نستطيع أن نقول ليس هنالك مجال من مجالات الحياة إلا ويخضع الإحصاء.

(١-٢) جمع المعلومات (البيانات):

إن عملية جمع البيانات هي نقطة البداية لتصنيفها وتحليلها واستنتاج النتائج بعد أن يكون الباحث قد حدد موضوع البحث بشكل دقيق وواضح، وتعتبر عملية جمع البيانات أول وأهم خطوة من خطوات الطريقة الإحصائية لأنه إذا حدثت أخطاء في هذه العملية فإن عمليتي التحليل والاستنتاج ستكون خاطئتين مهما بذل الباحث من عناية وجهد أثناء هاتين العمليتين.

(١-٢) مصادر جمع المعلومات:

يمكن تقسيم مصادر جمع المعلومات إلى قسمين رئيسيين هما:

١- المصادر المباشرة للمعلومات وهي الوحدات الرئيسية التي تجمع البيانات عنها

ومثل ذلك قد يسأل الباحث طلبة إحدى التخصصات عن رغبتهم في التخصص الذي يدرسونه، فالطلبة هنا مصدر مباشرة لهذه المعلومات وتمتاز المصادر المباشرة بأن المعلومات التي تم الحصول عليها يمكن التثبت من صحتها ومراجعتها لكن يعاب عليها أنها مكلفة من حيث المال والجهد والوقت.

أما أساليب جمع البيانات من مصادرها المباشرة فهي:

- ١- الاتصال الشخصي: يتم الاتصال الشخصي المباشرة عن طريق المقابلة الشخصية وفي هذه الحالة يجب على الباحث الانتقال إلى الشخص التي تتم المقابلة معه وجمع المعلومات منه ويمتاز الاتصال الشخصي بما يلي:
 - الحصول على إجابات الأشخاص الذين تتم مقابلتهم.
 - قيام الباحث بتوضيح أي غموض أو التباس قد يكون موجوداً في الأسئلة مما يجعل الإجابات أكثر دقة.

لكن يعاب على الاتصال الشخصي ما يلي:

- التحيز: الذي قد ينشأ بسبب جمع المعلومات غير المؤهل تأهلاً جيداً أو ربما يؤثر الباحث بوجهة نظره على الأشخاص الذين سيتم مقابلتهم.
 - الوقوع في بعض الأخطاء أثناء تدوين الإجابات.
- ٢- الاتصال الهاتفي: ويتم جمع المعلومات عن طريق الاتصال الهاتفي مع الأشخاص وطرح الأسئلة عليهم وتمتاز هذه الطريقة بأنها أقل كلفة من المقابلة الشخصية، لكن يعاب عليها بأنها تقتصر على الأشخاص الذين لديهم هواتف.

- ٣- الاستبيان: والاستبيان هو رزمة من الأوراق تحتوي على مجموعة من الأسئلة يطلب الباحث من الأشخاص المرسل إليهم الاستبيان عن طريق البريد الإلكتروني أو أي طريقة أخرى للإجابة عن هذه الأسئلة ويمتاز الاستبيان بأنه أقل كلفة من الأساليب السابقة لكن يعاب عليه أن هنالك ربما عدد من الأشخاص لن يجيبوا عليه وبالتالي عدم رده إلى الباحث.

- ٤- الملاحظة المباشرة: وهنا يتم جمع البيانات أما بالملاحظة الشخصية أو باستعمال أدوات إلكترونية ومثل ذلك إذا أراد باحث معرفة مدى إقبال طلبة الجامعة

على ارتياد الصالة الرياضية الخاصة بالجامعة فيجلس الباحث ويشاهد ذلك أو ربما يراقب ذلك بشكل إلكتروني.

ب- المصادر غير المباشرة: فالمصادر غير المباشرة للمعلومات هي جهات مختصة تجمع المعلومات عن المشكلة موضوع الدراسة ويمكن الحصول على المعلومات منها دون الرجوع إلى المصادر المباشرة للمعلومات فمثلاً إذا أردنا معلومات عن الولادات والوفيات خلال فترة زمنية معينة فيمكن الحصول عليها من دائرة الأحوال المدنية وهكذا.

(١-٢-٢) تصميم الاستبيان؛

يجب بذل عناية فائقة في تصميم الاستبيان بحيث تكون الأسئلة الواردة فيه ذات صلة وثيقة بالظاهرة موضوع الدراسة ولغتها سليمة لكي تكون المعلومات المدلل بها صحيحة ودقيقة. وهناك أمور يجب مراعاتها عند تصميم الاستبيان:

١- أن يكون الاستبيان من النوع المختصر المفيد بمعنى أن يحتوي على عدد أقل ما يمكن من الأسئلة، حتى لا يصيب الشخص أثله تعبئة الاستبيان الملل فيلجأ إلى التسرع وعدم الدقة في الإجابات.

٢- يجب تجربة الاستبيان للتأكد من صلاحيته.

٣- يجب أن يراعى توارد الأسئلة وتسلسلها وأن تكون الأسئلة جذابة.

٤- يجب على الباحث التنبيه بأن المعلومات هي سرية للغاية والهدف منها إحصائي فقط.

٥- يجب أن تكون الأسئلة العديدة من النوع البسيط والذي لا يحتاج إلى عمليات حسابية معقدة وأن لا تعتمد على الذاكرة.

٦- يجب الابتعاد عن الأسئلة التي تقود القارئ إلى ما يريد الباحث.

أنواع الأسئلة (الاستبيان)؛

أ - الأسئلة الثنائية: وهي الأسئلة التي تحتل أحد أمرين فقط مثل أسئلة الصواب والخطأ وتتمتاز هذه الأسئلة بأنها سهلة الأعداد والإجابة والتقييم لكن يعاب عليها بأنها تسهل الأمور أكثر مما يجب.

ب- أسئلة الاختيار من متعدد: وهذه أفضل من الأسئلة الثنائية إذا أنها تعطي عدة

بدائل ممكنة لكنه يجب أن يراعى فيها أن تغطي جميع الإمكانيات.
ج- الأسئلة المفتوحة: وهي الأسئلة التي تترك للمجيب حرية التعبير عن رأيه دون قيد لكن من مساوئ هذه الأسئلة يصعب التقييم أثناء عملية تحليلها (تحليل الإجابات).

(٣-١) تصنيف البيانات:

أن كبر حجم البيانات وتعدد أركانها يشكل صعوبة كبيرة تحول دون فهمها والتوصل إلى نتائج مهمة عنها لذلك تصنف البيانات بتبويبها وفق نظام معين في مجموعات متجانسة بهدف تلخيصها ووضعها في حجم مناسب من أجل فهمها وتحليلها.

أن عملية تصنيف البيانات يجب أن يعتمد على نظام يتم بموجبه تصنيف المعلومات وتبويبها وحتى يكون هذا النظام المعتمد في عملية التصنيف نظام ناجح يجب أن يتمتع بخواص هي:

- ١- عدم التداخل: يجب ألا تتداخل المجموعات التي تقسم إليها البيانات مع بعضها البعض بمعنى أنه يجب أن لا يوجد إلا مكان واحد للمفردة الواحدة في النظام.
- ٢- الشمولية: بمعنى يجب أن نجد كل مفردة من المفردات مكاناً لها ضمن إحدى مجموعات النظام.

٣- الاستمرارية في تطبيق الأساس المستخدم في التصنيف: بمعنى أنه إذا اتبع أساس معين كالأساس الزمني فيجب الاستمرار في تطبيق هذا الأساس في تصنيف كل مفردات المجتمع الواحد.

هناك أسس لعملية تصنيف البيانات تتوقف على طبيعة البيانات المراد تبويبها وما الهدف من استخدامها بعد عملية التبويب وهي:

- أ - الأساس الزمني: ويعتمد على أساس الزمن في تصنيف المعلومات كأن تصنف أعداد المقبولين في الجامعة على السنة التي تم قبولهم فيها.
- ب- الأساس الجغرافي: ويتم تصنيف المعلومات بناء على الموقع الجغرافي كأن يتم تصنيف الطلبة المقبولين في الجامعات بناء على موقع الجامعة.
- ج- الأساس الكمي: ويتم تصنيف المعلومات فيه بناءً على العدد ضمن ظاهرة

معينة كأن يتم تصنيف الطلبة المقبولين في الجامعات بناء على علمهم خلال فترة زمنية معينة.

د - الأساس النوعي: ويتم التصنيف بناء على هذا الأساس حسب النوع تبعاً لاختلاف خواص المفردة كأن يتم تصنيف المقبولين في الجامعات تبعاً للجنس (ذكر أو أنثى) أو الجنسية (أردني، سوري، ...).

هـ- الأساس المشترك: ويتم تصنيف البيانات حسب أكثر من أساس كأن يصنف الطلبة المقبولين في الجامعة حسب زمن دخولهم الجامعة والجامعة التي قبلوا فيها والجنس (ذكر أو أنثى) وأعدادهم.

٤-١) طرق جمع البيانات الإحصائية:

يتم جمع البيانات الإحصائية بإحدى الطرق التالية:

١- طريقة المسح الشامل: وهنا تجمع البيانات الإحصائية من جميع أفراد المجتمع الإحصائي دون استثناء وتمتاز هذه الطريقة بأنها تعطي صورة مفصلة عن جميع أفراد المجتمع الإحصائي وبأنها لا تحتوي أخطاء سببها استثناء بعض عناصر المجتمع الإحصائي.

٢- طريقة العينة: وهنا تجمع البيانات من مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي وتعميم النتيجة من الجزء على الكل. لكن هنالك حالات يتعذر فيها المسح الشامل فنستخدم طريقة العينة منها:

(I) فساد عناصر المجتمع الإحصائي فمثلاً إذا أردنا فحص دم مريض فإنه من المستحيل أن نقوم بأخذ دم المريض بأكمله ويجري عليه الفحص لأن ذلك يؤدي إلى وفاة المريض، لذا فإنه في هذه الحالة نأخذ عينة من الدم.

(II) عندما لا تتوافر جميع عناصر المجتمع الإحصائي، فمثلاً إذا أردنا دراسة كميات الأمطار التي سقطت في المملكة منذ عام ١٩٢٥ حتى الآن من أجل التعرف على أثرها على كميات إنتاج الحبوب في المملكة في تلك الفترة الزمنية، فقد يكون من المتعذر الحصول على سجلات عن كافة مناطق المملكة، لكل من كميات الأمطار وإنتاج الحبوب أو لأحدها.

(III) الجهد والوقت والتكاليف: لأن كل دراسة إحصائية مرتبطة بهذه الظروف.

(VI) يحتاج المسح الشامل إلى عدد كبير من الأشخاص لجمع البيانات الإحصائية وينتج عن ذلك أخطاء متعددة الأسباب منها الفروق الفردية بين العاملين وبالتالي أخذ عينة بواسطة عدد قليل من المختصين سبب من أسباب تقليل الأخطاء وبالتالي يؤدي إلى نتائج أكثر دقة.

(V) عندما يكون المجتمع متصلاً، كأن تكون مجموعة عناصره غير قابلة للعد مثل مخزون المملكة من الغاز الطبيعي ولمعرفة هذا المخزون يجب التنقيب بجميع الأراضي التابعة للمملكة وهذا الأمر غير ممكن عملياً لذلك نقوم بأخذ عينة من تلك الأراضي وإجراء عملية التنقيب فيها.

(٥-١) أنواع العينات:

للعينات أنواع كثيرة فهناك عوامل تتحكم في تحديد نوع العينة المستخلصة منها:

- طبيعة المشكلة أو الظاهرة المراد دراستها.
 - التباين بين مفردات المجتمع الإحصائي.
 - الاستخدامات المتوقعة للنتائج التي تحصل عليها نتيجة الدراسة.
- وبناء على هذه العوامل يمكن تصنيف العينات إلى نوعين هما:
- ١- العينة الغرضية أو العملية: ويتم سحب هذه العينة بعناية وحسب غرض الدراسة وتستخدم في الحالات التي يريد الباحث الحصول على فكرة سريعة عن مشكلة معينة أو لاختبار الاستبيان الإحصائي للتأكد من صلاحيته وتعديل الأخطاء إن وجدت وقد يستخدم هذا النوع من العينات في الأبحاث المتعلقة بللك لقلة التكاليف والجهد والوقت رغم تعرضها لنوع من التحيز.
 - ٢- العينات العشوائية: والعينة العشوائية هي أي جزء من المجتمع الإحصائي بحيث يكون لكل مفرد من مفردات المجتمع نفس الفرصة في الظهور.
- ويمكن تصنيف العينات العشوائية إلى نوعين هما:
- أ - العينة العشوائية غير المخلدة وهي العينة العشوائية البسيطة.
 - ب- العينات العشوائية المخلدة وتشمل الأنواع الأخرى وهي الطبقيّة، العنقودية، المنتظمة والمعياريّة.
- وسنأتي بشيء من التفصيل بشرح هذين النوعين من العينات:

أ- العينة العشوائية البسيطة:

- يتم اختيار العينة العشوائية البسيطة طبقاً لحجم المجتمع الإحصائي.
- ١- إذا كان حجم المجتمع صغيراً حيث يكون حجمه أقل من أو يساوي (٢٥) مفردة نقوم بإعطاء كل مفردة من مفردات المجتمع بطاقة مسجل عليها رقم بحيث تكون هذه البطاقات متشابهة من حيث المظهر ثم نقوم بخلط تلك البطاقات جيداً ومن ثم سحب عينة منها بالحجم الذي نريده.
 - ٢- إذا كان حجم المجتمع كبيراً فإنه من الصعب اتباع الأسلوب السابق، لذا سنلجأ إلى استخدام جدول الأعداد العشوائية حيث نقوم بترقيم مفردات المجتمع من ١-م (حيث م حجم المجتمع) والمثل التالي يوضح ذلك: لنفترض بأن لدينا مجتمع مكون من (٥٠٠) موظف وأردنا اختيار عينة مقدارها (٢٠) موظف فإننا نعمل على النحو التالي:

- نعطي الموظفين أرقاماً متسلسلة من ١-٥٠٠ على الشكل التالي:

٠٠١ ، ٠٠٢ ، ، ٥٠٠ أي أن كل رقم مكون من ثلاثة منازل.

- ننظر في جدول الأعداد العشوائية الموجودة في نهاية الكتاب فنجد الأعداد مكونة من خمسة منازل فنحذف منزلة الأحاد والعشرات فتصبح مكونة من ٣ منازل ونقرأ الأرقام من أعلى إلى أسفل ونكتب الأرقام التي تقل عن (٥٠٠) أو تساويها حتى ينتهي العمود ثم نتقل إلى العمود الآخر حتى يصل عدد الأرقام التي تم اختيارها إلى (٢٠) رقماً مع مراعاة عدم تكرار أي رقم اختبر سابقاً. والأرقام التي تم اختيارها هي: ٤٣٦، ١٥٨، ٤٩١، ١٤٦، ٤٧٢، ٢٠٥، ٣٨٧، ٣٢، ٤٥٩، ٥٨، ٣٢٥، ١٩٩، ١٤٠، ١١٨ ، ٢٤٠، ٤١٩، ١٦١، ٣٥٧، ٣٨٧، ٤٦٦.

ب- العينات العشوائية المحددة:

- وهي العينات التي تعطى لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متكافئة في الاختيار لكن بعض المفردات قد يتم حرمانها ويمكن تصنيفها إلى الأنواع التالية:
- ١- العينة الطبقية: حيث يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى فئات متجانسة ويتم اختيار جزء من العينة من كل فئة يتناسب وحجم تلك الفئة وطبقاً لهذا الأسلوب في الاختيار فإن كل مفردة لها فرصة الظهور في العينة رغم أن العينة قد صممت بشكل يتيح التمثيل النسبي لكل فئات المجتمع.

فلو فرضنا بأن لدينا مجتمع إحصائي حجمه يساوي م وقسم هذا المجتمع إلى الفئات ف_١، ف_٢،، ف_{٢٠} بحيث أن حجم الفئة ف_١ = م_١، حجم الفئة ف_٢ = م_٢، ...، حجم الفئة ف_{٢٠} = م_{٢٠} شريطه أن م_١ + م_٢ + ... + م_{٢٠} = م. وأردنا اختيار عينة حجمها = ك من هذا المجتمع بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة فإننا ننتج الأسلوب التالي:

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة ف} = \frac{\text{حجم الفئة ف}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة الكلي}$$

$$ك = \frac{م \times م}{م}$$

والمثل التالي يوضح ذلك: مجتمع حجمه (٥٠٠٠) مفردة.

قسم إلى الفئات التالية:

- الفئة أ وتساوي (١٠٠٠) مفردة.
- الفئة ب وتساوي (٢٠٠٠) مفردة.
- الفئة ج وتساوي (١٥٠٠) مفردة.
- الفئة د وتساوي (٥٠٠) مفردة.

وأردنا سحب منه عينة عشوائية بحيث يكون عدد مفرداتها يساوي (١٪) من مجموع مفردات المجتمع بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة؟ كيف يتم سحب مثل هذه العينة.

الحل: أن حجم العينة الكلي = (١،٠١) × ٥٠٠٠ = ٥٠ مفردة.

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة أ} = ١٠٠٠ \times \frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠} = ١٠٠ \text{ مفردات}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة ب} = ٢٠٠٠ \times \frac{٢٠٠٠}{٥٠٠٠} = ٢٠٠ \text{ مفردة}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة ج} = ١٥٠٠ \times \frac{١٥٠٠}{٥٠٠٠} = ١٥٠ \text{ مفردة}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة د} = ٥٠٠ \times \frac{٥٠٠}{٥٠٠٠} = ٥٠ \text{ مفردات}$$

ويجدر بالملاحظة بأن هذا النوع من العينات يؤخذ فيه عندما يشعر الباحث بأن نتيجة الدراسة قد تعتمد على الجنس أو العمر أو مكان الولاية... الخ .

٢- العينة العنقودية (متعددة المراحل) وهي بديل للعينة الطبقية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي. وفي هذا النوع من العينات يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة يسمى كل منها عنقوداً. فمثلاً إذا أردنا دراسة حول إتقان طلبة إحدى الجامعات لاستخدام الحاسوب حيث نقوم بتقسيم الجامعة إلى الكليات المختلفة الآداب ، العلوم ، الاقتصاد والعلوم الإدارية، الزراعة، الهندسة ... ومن ثم الكليات إلى تخصصات تغطي الجامعات وتعتبر هذه التخصصات هي عناصر المجتمع الإحصائي وكل وحدة من هذه المجموعات تسمى عنقوداً ثم نقوم باختيار عينة من تلك التخصصات ونجري الدراسة عليها.

٣- العينة المنتظمة: وهي بديل آخر من بدائل العينة العنقودية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي. ومثل ذلك إذا أردنا معرفة مدى رضى الطلبة عن الخدمات التي تقدمها مكتبة الجامعة فإنه يمكننا أن نجلس طالب على مدخل الجامعة ونطلب منه أن يسأل كل سابع طالب يدخل إلى الجامعة وتسجيل آراءه حول هذا الموضوع.

ويجدر بالملاحظة بأن هذا فيه عشوائية إذا أنه ليس معروفاً مسبقاً الطلبة الذين سنسألهم حول الموضوع وانتظام هذا النوع أننا نسأل كل سابع طالب.

٤- العينة المعيارية: وهي تلك العينة التي تتفق مع المجتمع الإحصائي من حيث مقاييسه الإحصائية كالوسط والوسيط والانحراف المعياري وتختار مثل هذه العينات بطريقة تتابعية. فمثلاً إذا أردنا تقدير نسبة نجاح عملية معينة، فإننا لن نختار مثل هذه العينات بطريقة عشوائية ونجري مثل هذه العملية لأناس أصحاب بل أن المرضى يراجعون المستشفى ومن هم بحاجة إلى العملية تجري لهم العملية فتقدر نسبة النجاح لأول عشرة مرضى ثم لأول عشرين مريض حتى تستقر النسبة وبعدها نعمم النتيجة. فقد لاحظنا بأن هذه العينة قد اختيرت بعناية ودقة وبشكل تتابعي.

(٦-١) أنواع المتغيرات الإحصائية:

عند إجراء أي دراسة إحصائية، فإننا نصادف متغيرات من أنواع مختلفة فمثلاً درجة الحرارة تعطى كأعداد إلى درجة معينة من الدقة، بينما هنالك متغيرات ليست عددية وأمثلة ذلك الجنس (متغير ثنائي لأنه يأخذ إحدى حالتين أما ذكر أو أنثى)، الجنسية، لون العيون، الرتب العسكرية.

وبناءً على ما تقدم يمكن تعريف المتغير بأنه ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها.

ويمكن تصنيف المتغيرات بناءً على:

١- مجال ذلك المتغير وهو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، ويقسم مجال المتغير إلى قسمين.

أ - إذا كان مجال المتغير مجموعة منتهية أو مجموعة قابلة للعد ففي هذه الحالة نسمي المتغير متغير منفصل وأمثلة ذلك أعداد الأطفال في أسرة، لون العيون، الرتب العسكرية، مكان الولادة، رواتب الموظفين، أعمار المعلمين في المرحلة الابتدائية، الرتب الأكاديمية، الدرجة العملية ... الخ.

ب- إذا كان مجال المتغير فترة سمي المتغير متغير متصل. وأمثلة ذلك درجة الحرارة، الوزن، الطول، العمر، شدة الصوت وغيرها.

٢- تدرج القياس المستخدم: بناءً على التدرج المستخدم تصنف المتغيرات إلى صنفين هما:

أ - متغيرات نوعية (وصفية): وهي المتغيرات التي لا يمكن قياسها رقمياً والتدرج المستخدم لقياسها يقسم إلى قسمين:

١- التدرج الاسمي: يستخدم هذا التدرج للحكم على كون المشاهدين متساويين أم لا وأمثلة ذلك لون العيون، الجنسية، مكان الولادة وغيرها.

فلو أخذنا شخصين ونظرنا إلى مكان ولادتهما نستطيع الحكم على كون مكان الميلاد نفسه أم لا وتسمى علاقة البيانات المقاسة بهذا التدرج بيانات اسمية. لكن هذا التدرج لا يسمح بالمفاضلة فمثلاً إذا كان جنسية شخص أردني وآخر سوري فهذا لا يعني بأن الشخص الأول أفضل من الثاني بل فقط يعني

بأنهم مختلفان في الجنسية فقط.

٢- التدرج الترتيبي: هذا التدرج أفضل من التدرج الأسمي يسمح بللفاضلة أي ترتيب العناصر وفق سلم معين وأمثلة ذلك الرتب العسكرية، الرتب الأكاديمية، المستوى الأكاديمي، المؤهل العلمي فهذه البيانات ذات طبيعة غير عددية لكن يمكن ترتيبها وفق ترتيب هرمي فمثلاً الرتب الأكاديمية يمكن ترتيبها من الرتبة العليا إلى الدنيا كالتالي: أستاذ، أستاذ مشارك، أستاذ مساعد، مدرس، محاضر. ويطلق علاقة على البيانات المقاسة بهذا التدرج بيانات ترتيبية.

ب- متغيرات كمية: وهي المتغيرات التي يمكن قياسها رقمياً والتدرج المستخدم لقياسها يصنف إلى صنفين:

١- التدرج الفتوي: وهذا التدرج يسمح لنا بإعطاء معنى لمقدار الفارق بين المشاهدين وأمثلة ذلك درجة الحرارة المثوية.
فمثلاً درجة الحرارة 30° مثوية أكبر من درجة الحرارة 20° .

٢- التدرج النسبي: هذا التدرج بالإضافة لخواص التدرج الفتوي يسمح لنا بإعطاء معنى لنسبة المشاهدة الأولى إلى الثانية ومن أهم معانيه بأنه يعطي معنى للصفر المطلق. وأمثلة ذلك: الطول، الوزن، العمر، ودرجة الحرارة المطلقة وعدد الأطفال عند عائلة. فمثلاً إذا كان لدينا شخص وزنه (100) كغم وشخص آخر وزنه (50) كغم فإننا نقول بأن الشخص الأول من وزنه ضعف الشخص الثاني، لكن عندما نقول بأن درجة الحرارة 40° مثوية ودرجة الحرارة 20° فهذا لا يعني بأن درجة الحرارة الأولى هي ضعف الثاني في الأثر ولكن أكبر منها.

تمارين الوحدة الأولى

س١ : عرف المصطلحات التالية:

علم الإحصاء، المشاهدات، الإحصاء التحليلي، العينة، المجتمع الإحصائي، المتغير، التوزيع النسبي، مجال المتغير، العينة الغرضية، الاستبيان، المسح الشامل.

س٢ : اذكر ثلاثة أسباب لاختيار العينات؟

س٣ : استعمل جدول الأرقام العشوائية لاختيار عينة حجها (١٥) من مجتمع يتكون من (٢٥٠٠) شخصاً مستعملاً أسلوب العينة العشوائية البسيطة.

س٤ : صنف المتغيرات التالية حسب مجال المتغير ثم حسب التوزيع المستخدم. درجة الحرارة المثوية، درجة الحرارة المطلقة، الجنس، الجنسية، الديانة، عدد الأطفال عند أسرة، عدد الزوجات عند شخص، الطول، الوزن، عدد الطلاب في المراحل المدرسية المختلفة، عدد الحوادث على الطريق الصحراوي، كميات الأمطار، أعمال المعلمين في مدرسة ابتدائية، الرتب العسكرية، رواتب الموظفين. أرقام لوحات السيارات، أرقام قاعات التدريس، شدة التيار الكهربائي.

س٥ : مجتمع جامعي مؤلف من (١٥٠٠٠) شخص قسّم إلى الفئات التالية:

حملة درجة الدكتوراه (٥٠٠). حملة درجة دبلوم (٥٠٠).

حملة درجة الماجستير (٢٠٠). حملة الثانوية العامة (٣٠٠).

حملة درجة البكالوريوس (١٥٠٠). طلبة (١٢٠٠٠).

يراد تشكيل لجنة لتمثيل الجامعة وذلك بسحب عينة عشوائية بحيث يكون

نسبة المعاينة تساوي (١٪) من المجتمع الجامعي.

أ- كيف يتم سحب مثل هذه العينة بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في

العينة.

عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية

(١-٢) عرض البيانات الإحصائية

(٢-٢) التوزيعات التكرارية.

(١-٢-٢): بناء التوزيع التكراري.

(٢-٢-٢): أنواع الجداول التكرارية.

(٣-٢-٢): التوزيع التكراري المتجمع.

(٣-٢) تمثيل الجداول التكرارية بيانياً.

(٤-٢) تمثيل التوزيعات التراكمية (المتجمعة) بيانياً.

(٥-٢) أشكال التوزيعات التكرارية.

تمارين الوحدة.

عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية

(٢-١) عرض البيانات الإحصائية:

بعملية تبويب وتصنيف البيانات تصبح الخصائص الهامة لها أكثر وضوحاً. إلا أن استخدام أساليب معينة في عرض البيانات يساعد على زيادة الوضوح في الخصائص وبروزها.

لذا فإن هنالك عدة أساليب لعرض البيانات الإحصائية هي:

١- العرض الجدولي: لا توجد طريقة موحدة لعمل الجداول، إلا أن هنالك أسس

عامة يجب مراعاتها عند بناء الجدول لتوفير العنصر الأساسية فيه وهي:

١- يجب أن يكون الجدول معنوياً بشكل واضح ومختصر ليعطي فكرة واضحة ودقيقة عما يحويه الجدول.

٢- أن تكون للأعمدة والصفوف عناوين مختصرة ولكنها غير غامضة.

٣- أن ترتب البيانات حسب ترتيبها الزمني أو حسب أهميتها من الناحية الوصفية.

٤- يجب توضيح وحدات القياس المستخدمة.

٥- يجب توضيح المصدر التي أخذت منه المعلومات.

٦- يجب أن يكون هنالك تفسيرات عن سبب شذوذ بعض البيانات إن وجدت.

مثال (١)، الجدول (١) التالي يعطي عدد سكان الولايات المتحدة بالـمليون للسنوات

١٨٤٠، ١٨٥٠، ...، ١٩٦٠.

السنة	١٨٤٠	١٨٥٠	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠
السكان بالـمليون	١٧,١	٢٣,٢	٣٦,٤	٣٩,٨	٥٠,٢	٦٢,٩	٧٦	٩٢	١٠٥,٧	١٢٢,٨	١٣٦,٧	١٥١,١	١٧٩,٣

المصدر: مكتب التعداد.

٢- العرض البياني: ويصنف العرض البياني إلى نوعين هما:

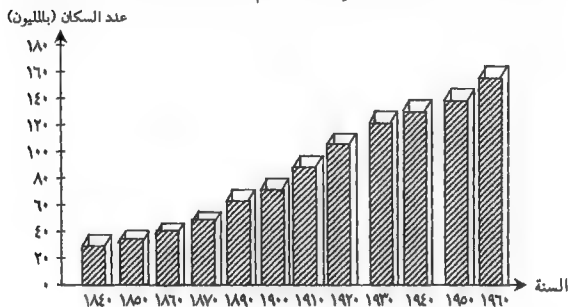
أ - الأعمدة البيانية والمستطيلات: أن عرض البيانات باستعمال الأعمدة

(المستطيلات) من أكثر أنواع التمثيل، وتتلخص هذه الطريقة برسم

أعمدة (مستطيلات) متساوية القاعدة ولكن ارتفاع كل منها يتناسب مع

حجم القيمة التي يمثلها. ونظراً لأن القواعد متساوية فإن مساحات الأعمدة

(المستطيلات) تكون متناسبة مع القيم التي تمثلها ويراعى أن يترك بين كل عمود (مستطيل) وآخر مسافة مناسبة لفصلهما عن بعض.
استعمالاته: تتوقف طريقة عرض البيانات باستخدام الأعمدة أو المستطيلات على نوع وطبيعة البيانات المعروضة واستعمالاته هي:
١- إظهار التطور التاريخي للظاهرة. ففي هذه الحالة يرسم المحور الأفقي بحيث يمثل الزمن فيصبح ارتفاع العمود (المستطيل) يمثل التطور التاريخي.
مثال (٢): أعرض البيانات الواردة في الجدول رقم (١) بطريقة الأعمدة البيانية.



شكل (١)

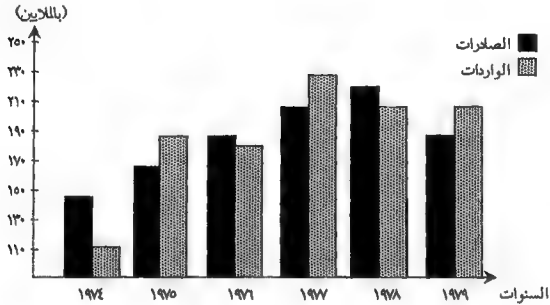
٢- مقارنة بين ظاهرتين أو أكثر: قد تستخدم الأعمدة (المستطيلات) لمقارنة أكثر من ظاهرة وذلك برسم مستطيلات متلاصقة للظواهر المراد مقارنتها في السنوات المختلفة ويشترط أن يميز المستطيلات (الأعمدة) الخاصة بكل ظاهرة.
مثال (٣): فيما يلي الميزان التجاري لإحدى الدول في السنوات (١٩٧٤-١٩٧٩) بملايين الدنانير.

السنة	١٩٧٤	١٩٧٥	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩
الصادرات	١٤٥	١٧٣	١٩٠	٢٢٠	٢٣٠	٢٠٠
الواردات	١١٠	١٩٠	١٨٠	٢٤٠	٢٢٠	٢١٥

جدول رقم (٢).

اعرض هذه البيانات بطريقة المستطيلات.

الواردات والصادرات

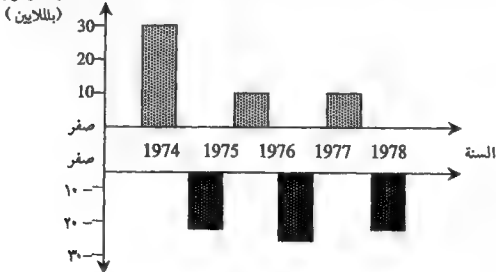


شكل رقم (٢)

٣- جذب الانتباه إلى اتجاه الأرقام وليس إلى الأرقام ذاتها.

قد يكون الهدف هو إبراز الفرق بالزيادة أو بالنقص بين بيانين وفي هذه الحالة تمثل الزيادة بالمستطيلات بالاتجاه العلوي من المحور أو خط الصفر والنقص في اتجاه السفلي له. والشكل (٣) يبين الفرق بين الصادرات والواردات في المثال رقم (٢).

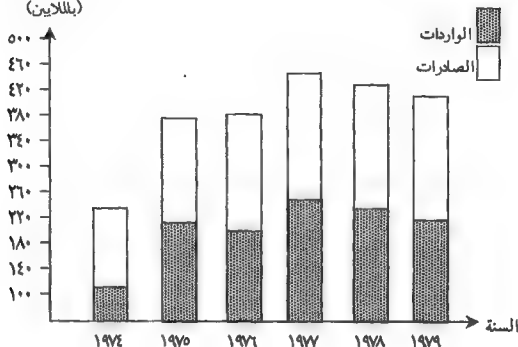
الصادرات والواردات



شكل (٣)

يمكن استخدام طريقة الأعملة (المستطيلات) المجزأة البيانية لتحقيق الهدفين (٢) و (٣) كما في الشكل (٤).

الصادرات والواردات
(بالملايين)



شكل (٤)

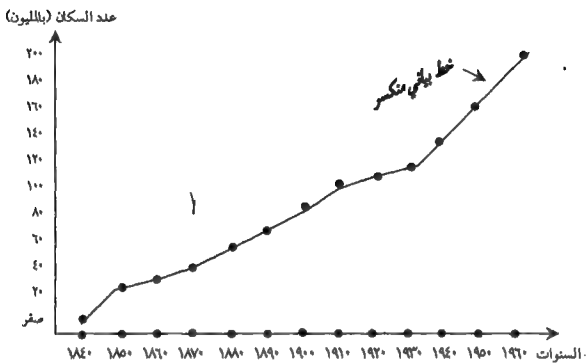
ب- الخط البياني: يستعمل الخط البياني في الحالات التالية:

١- لتمثيل العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين بحيث يبين كيفية تغير إحدى الظاهرتين مع الأخرى أو تبعاً لها كما في الشكل (٥) الذي يبين أعداد سكان أمريكا في السنوات ١٨٤٠، ١٨٥٠، ... ، ١٩٦٠.

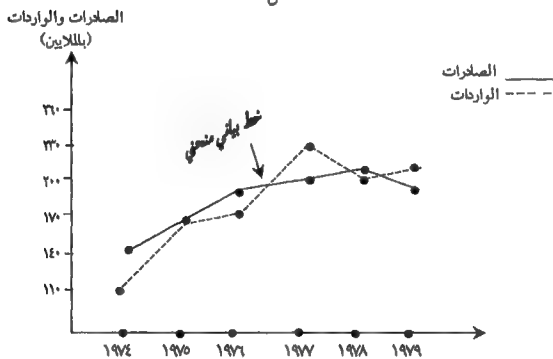
٢- للمقارنة بين أكثر من ظاهرة وذلك عن طريق رسم الخطوط البيانية لهذه الظواهر على نفس الشكل. ويسهل عمل ذلك إذا كان هنالك متغير مشترك بين هذه الظواهر مثل الزمن بحيث يخصص المحور الأفقي للمتغير المشترك والشكل (٦) يبين الصادرات والواردات لإحدى الدول في السنوات (١٩٧٤-١٩٧٩).

ومن الجدير بالذكر أن هنالك نوعين من الخطوط البيانية هما:

(I) الخط البياني المنكسر. (II) الخط البياني المنحني.



(٥) الشكل



(٦) الشكل

٣- طريقة الدائرة: تستعمل هذه الطريقة عندما يراد تقسيم الكل إلى أجزائه فيمثل المجموع الكلي بالدائرة كاملة ويمثل كل جزء بقطاع الدائرة حيث تعطى زاوية قطاع الظاهرة بالعلاقة التالية:

$$\text{زاوية قطاع الظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة}}{\text{المجموع الكلي لقيم الظواهر}} \times 360^\circ \dots\dots (*)$$

ولتوضيح هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال (٣)، فيما يلي طلبة إحدى كليات المجتمع التابعة لجامعة البلقاء موزعين كالتالي:

التخصص	تربية خاصة	تربية طفل	خدمة اجتماعية	إدارة	تسويق	محاسبة	المجموع
عدد الطلبة	٣٨	٣٦	٤٠	٤٢	٤٤	٤٠	٢٤٠

المصدر: بيانات افتراضية، الجدول رقم (٣).

اعرض هذه البيانات بطريقة الدائرة.

الحل، أولاً: نحدد زاوية قطاع كل تخصص من هذه التخصصات حسب العلاقة (*):

$$\text{زاوية قطاع تخصص التربية الخاصة} = \frac{\text{عدد طلبة التربية الخاصة}}{360} \times 360^\circ$$

عدد الطلبة الكلي

$$= 360^\circ \times \frac{38}{240} = 57^\circ$$

$$= 360^\circ \times \frac{36}{240} = 54^\circ \quad \text{زاوية قطاع تخصص تربية الطفل}$$

$$= 360^\circ \times \frac{40}{240} = 60^\circ \quad \text{زاوية قطاع تخصص الخدمة الاجتماعية}$$

$$= 360^\circ \times \frac{42}{240} = 63^\circ \quad \text{زاوية قطاع تخصص الإدارة}$$

$$= 360^\circ \times \frac{44}{240} = 66^\circ \quad \text{زاوية قطاع تخصص التسويق}$$

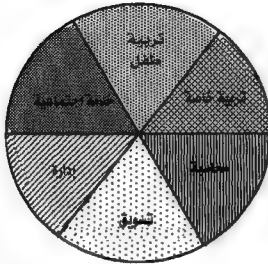
$$= 360^\circ \times \frac{40}{240} = 60^\circ \quad \text{زاوية قطاع تخصص المحاسبة}$$

ملاحظة: يجب أن يكون مجموع زوايا القطاعات المختلفة = 360° .

وفي مثالنا $57^\circ + 54^\circ + 60^\circ + 63^\circ + 66^\circ + 60^\circ = 360^\circ$.

ثانياً: نقوم برسم دائرة ونحدد نصف قطر فيها ثم نحدد زاوية كل قطاع. ويكون

التمثيل كما في الشكل (٧).

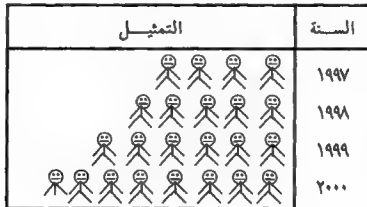


شكل (٧)

٤- العرض بالطريقة التصويرية: وهي من أكثر الطرق استعمالاً عندما يهدف الباحث إلى جذب انتباه القارئ وينقل إليه الفكرة بصورة واضحة لا تحتاج إلى مستوى علمي معين. فباستخدام الصور والأشكال المعبرة يمكن إيصال البيانات إلى جميع فئات المجتمع في صورة ميسرة على الفهم، جذابة للنظر. وأكثر ما تستخدم في كتب علم النفس، كتب الأطفال، الدعايات والتقارير الحكومية. مثال (٤)، الجدول التالي يبين أعداد خريجي أحد كليات المجتمع التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية خلال الأعوام (١٩٩٧-٢٠٠٠).

السنة	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
أعداد الخريجين	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٥٠

اعرض هذه البيانات بالطريقة التصويرية.
الحل، لنفترض بأن كل (١٠٠) خريج مثلوا بصورة واحدة.



(٢-٧) التوزيعات التكرارية:

هي عملية لتصنيف البيانات تصنيفاً كمياً ويتمتع التوزيع التكراري بالخواص التالية:

- ١- تصنف المفردات إلى مجموعات متجانسة بحيث تشمل كل مجموعة على عدد من القيم المتقاربة وبحيث لا تنتمي كل مفردة إلا لمجموعة واحدة فقط.
 - ٢- طريقة لاختصار مجموعة من البيانات وتصنيفها بحيث يسهل التعامل معها وصياغتها بأشكال متعددة تلائم الأغراض المختلفة.
 - ٣- مجموع التكرارات يساوي عدد البيانات (المفردات).
- مثال (١)، إذا كانت البيانات التالية تمثل علامات (٢٠) طالباً في امتحان ما:

١٠	٧	٨	٩	١٥	١٤	١٢	١٣	١٢	١٢
١٢	١٣	١٠	١٥	١٤	٦	١٥	١٤	١٢	١٠

فإن الجدول (١) يمثل التوزيع التكراري لهذه العلامات.

ونلاحظ في بناء هذا الجدول أننا بدأنا من أقل قيمة وهي (٦) ورتبنا القيم تصاعدياً حتى وصلنا إلى أكبر قيمة وهي (١٥) كما يظهر في العمود الأول أما عناصر العمود الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت فيها العلامة أما العلامة (١١) التي لم تظهر في البيانات فوضعنا تكرارها صفراً

العلامة	التكرار
٦	١
٧	١
٨	١
٩	١
١٠	٣
١١	صفر
١٢	٥
١٣	٢
١٤	٣
١٥	٣
المجموع	٢٠

جدول رقم (١)

(٢-٢-١) بناء التوزيع التكراري:

عندما يكون عدد البيانات صغيراً تمكننا من بناء التوزيع التكراري مباشرة كما في المثال (١). أما إذا كان عدد البيانات كبيراً فإنه يجدر بنا في هذه الحالة أن نقسم البيانات إلى فئات. وقبل الخوض في كيفية بناء مثل هذا التوزيع سنعمل على تعريف بعض المصطلحات الواردة فيه.

الفئة: هي مجموعة جزئية محددة بدقة ووضوح وتحوي عدداً من القيم التي يعتقد الباحث أنها شبه متجانسة ويفضل أن تكون هذه الفئات متساوية في الطول.

عدد الفئات: ليس هنالك قاعدة ثابتة لتحديد عدد الفئات المرغوب فيه لذلك فإن ما يتحكم بعدد الفئات هو مدى البيانات ودرجة تجانسها ومستوى الدقة المطلوب فمثلاً إذا كان عدد البيانات أكثر من خمسين مفردة فيجب أن يكون عدد الفئات أكبر من أو يساوي عشرة وأقل من عشرين فئة أما إذا كان عدد المفردات أقل من خمسين مفردة فعلى الفئات يجب أن يكون أكبر أو يساوي خمس فئات وأقل من عشرة.

خطوات بناء التوزيع التكراري: سنوضح خطوات بناء التوزيع التكراري من خلال المثال التالي:

مثال (٢): البيانات التالية تمثل علامات (٨٠) طالب في مادة الرياضيات في إحدى المجموعات:

٦٨	٨٤	٧٥	٨٢	٦٨	٩٠	٦٢	٨٨	٧٦	٩٣
٧٣	٧٩	٨٨	٧٣	٦٠	٩٣	٧١	٥٩	٨٥	٧٥
٦١	٦٥	٧٥	٨٧	٧٤	٦٢	٩٥	٧٨	٦٣	٧٢
٦٦	٧٨	٨٢	٧٥	٩٤	٧٧	٦٩	٧٤	٦٨	٦٠
٩٦	٧٨	٨٩	٦١	٧٥	٩٥	٦٠	٧٩	٨٣	٧١
٧٩	٦٢	٦٧	٩٧	٧٨	٨٥	٧٦	٦٥	٧١	٧٥
٦٥	٨٠	٧٣	٥٧	٨٨	٧٨	٦٢	٧٦	٥٠	٧٤
٨٦	٦٧	٧٣	٨١	٧٢	٦٣	٧٦	٧٥	٨٥	٧٧

المطلوب بناء التوزيع التكراري.

١- إيجاد المدى: المدى = أكبر مشاهدة - أقل مشاهدة.

$$= ٩٧ - ٥٠ = ٤٧$$

٢- اختيار عدد فئات مناسب: وفي مثالنا سنختار عدد الفئات = ١٠

٣- تحديد طول الفئة وهو عبارة عن المدى مقسوماً على عدد الفئات ثم تقريب الجواب دائماً إلى أعلى بحيث يساوي أو يقل عن عدد الأرقام المعنوية المستعملة في البيانات.

$$\text{وفي مثالنا طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{٤٧}{١٠} = ٤,٧ \approx ٥$$

وتم تقريب الجواب لأقرب عدد صحيح (لأن البيانات معطاة لأقرب عدد صحيح).

٤- تحديد الحد الأدنى لأول فئة ويجب أن يكون هذا الحد مساوياً أو أصغر من أقل قيمة من البيانات وأن تكون درجة دقته نفس درجة دقة البيانات المستعملة. وفي مثالنا يكون الحد الأدنى لأول فئة يساوي (٥٠). وبعد ذلك نحدد الحد الأدنى الفعلي لتلك الفئة وهو عبارة عن الحد الأدنى ناقصاً نصف وحدة دقة.

فمثلاً، إذا كانت أعداد البيانات معطاة لأقرب واحد صحيح فإن نصف وحدة الدقة تساوي (٠,٥) أما إذا كانت معطاة لأقرب منزلة عشرية واحدة فنصف وحدة الدقة تساوي (٠,٥) أما إذا كانت البيانات معطاة لأقرب منزلتين عشريتين فنصف وحدة الدقة تساوي (٠,٠٥). وفي مثالنا يكون نصف وحدة الدقة تساوي (٠,٥) وبالتالي:

$$\text{الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى} = \text{الحد الأدنى للفئة الأولى} - \frac{1}{4} \text{ وحدة دقة}$$

$$٤٩,٥ - ٠,٥ = ٥٠$$

٥- نعين الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى وذلك بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى الفعلي لتلك الفئة ومن ثم نعين الحد الأعلى للفئة الأولى وهو يساوي الحد الأعلى الفعلي ناقصاً نصف وحدة دقة. وفي مثالنا يكون:

$$\text{الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى} = \text{الحد الأدنى الفعلي} + \text{طول الفئة}$$

$$٥٤,٥ = ٥٠ + ٤,٥$$

$$\text{الحد الأعلى للفئة الأولى} = \text{الحد الأعلى الفعلي للفئة} - \text{نصف وحدة دقة}$$

$$٥٤ = ٥٤,٥ - ٠,٥$$

وبهذا نكون قد حصلنا على حدود الفئة الأولى وهي ٥٠-٥٤.

٦- نعين الحدود الدنيا والعليا لجميع الفئات وذلك بإضافة طول الفئة لكل حد ومن ثم نعين الحدود الفعلية بإضافة طول الفئة لكل حد فعلي.

٧- تعيين مراكز الفئات: ومركز الفئة يساوي مجموع حديها مقسوماً على ٢. وفي مثالنا يكون:

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{\text{الحـد الأدنى} + \text{الحـد الأعلى}}{٢} = \frac{١٠٤ + ٥٤}{٢} = ٥٧$$

٨- نفرغ البيانات المعطاة لدينا على الفئات التي أنشأناها وذلك باستعمال خط عمودي لكل قراءة وخط مائل للقراءة الخامسة في كل فئة (حتى تتشكل حزمة) وذلك لتسهيل جمع التكرارات.

وفي مثالنا لا يوجد سوى مفردة واحدة تقع ضمن الفئة (٥٤-٥٤) وهي ٥٣ لذلك نضع أمام الفئة الخط/ (للدلالة أن هنالك مفردة واحدة).

٩- تجمع التكرارات المقابلة لكل فئة ونسجله في عمود التكرارات ومن ثم نجمع التكرارات لجميع الفئات ونقارنه بعدد البيانات فإذا كان عدد البيانات يساوي (ن) فيجب أن يكون مجموع التكرارات يساوي (ن). وفي مثالنا بما أن عدد البيانات يساوي (٨٠) يجب أن يكون مجموع التكرارات يساوي (٨٠).

والجدول رقم (٢) يبين التوزيع التكراري لهذه البيانات.

الفئات	الحدود الفعلية	تفرغ البيانات	التكرار	مركز الفئة
٥٤-٥٠	٥٤,٥-٤٩,٥	/	١	٥٢
٥٩-٥٥	٥٩,٥-٥٤,٥	//	٢	٥٧
٦٤-٦٠	٦٤,٥-٥٩,٥	/-///-///	١١	٦٢
٦٩-٦٥	٦٩,٥-٦٤,٥	-///-///	١٠	٦٧
٧٤-٧٠	٧٤,٥-٦٩,٥	//-///-///	١٢	٧٢
٧٩-٧٥	٧٩,٥-٧٤,٥	+///-///-///-///	٢١	٧٧
٨٤-٨٠	٨٤,٥-٧٩,٥	/-///	٦	٨٢
٨٩-٨٥	٨٩,٥-٨٤,٥	///-///	٩	٨٧
٩٤-٩٠	٩٤,٥-٨٩,٥	///	٤	٩٢
٩٩-٩٥	٩٩,٥-٩٤,٥	///	٤	٩٧
المجموع			٨٠	

جدول (٢)

مثال (٣)، البيانات التالية تبين الأقطار بالمليمترات لعينة من (٥٠) من كرات مصنوعة في شركة ما. كون التوزيع التكراري للأقطار.

٧,٣٩	٧,٣٦	٧,٣٥	٧,٤١	٧,٢٤	٧,٤٠	٧,٣٣	٧,٣٥	٧,٣٨	٧,٢٩
٧,٤١	٧,٢٩	٧,٣٥	٧,٣٣	٧,٢٨	٧,٣٠	٧,٣٥	٧,٣٣	٧,٣٧	٧,٣٧
٧,٣٤	٧,٣٦	٧,٤٢	٧,٣٨	٧,٣٩	٧,٢٧	٧,٣٦	٧,٤٣	٧,٢٨	٧,٣٦
٧,٣٦	٧,٣٦	٧,٢٥	٧,٣٤	٧,٣٤	٧,٤٦	٧,٤٠	٧,٣٦	٧,٤٥	٧,٣٠
٧,٣٦	٧,٣٣	٧,٣٨	٧,٣٣	٧,٣٥	٧,٣٦	٧,٣٥	٧,٤٢	٧,٣٣	٧,٣٣

الحل:

$$١- \text{ المدى} = \text{أكبر قطر} - \text{أصغر قطر} = ٧,٤٦ - ٧,٢٤ = ٠,٢٢$$

$$٢- \text{ لنختار عدد الفئات} = ٦$$

$$٣- \text{ طول الفئة} = \frac{٠,٢٢}{٦} = ٠,٠٣٦٦ \approx ٠,٠٤$$

حيث تم التقريب لأقرب منزلتين عشريتين لأن الأقطار درجة الدقة فيها منزلتين عشريتين.

$$٤- \text{ الحد الأدنى للفئة الأولى} = ٧,٢٤$$

ومن ثم الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى = الحد الأدنى للفئة الأولى - $\frac{١}{٢}$ وحدة دقة.

$$= ٧,٢٤ - ٠,٠٠٥ = ٧,٢٣٥$$

٥- الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى = الحد الأدنى الفعلي للفئة + طول الفئة.

$$= ٧,٢٣٥ + ٠,٠٤ = ٧,٢٧٥$$

ومن ثم الحد الأعلى للفئة الأولى = الحد الأعلى الفعلي - $\frac{١}{٢}$ وحدة دقة.

$$= ٧,٢٧٥ - ٠,٠٠٥ = ٧,٢٧$$

٦- تحديد بقية الحدود للفئات الأخرى.

$$٧- \text{إيجاد مراكز الفئات ومركز الفئة الأولى} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$$

$$٧,٢٥٥ = \frac{٧,٢٧ + ٧,٢٤}{٢} =$$

والجدول رقم (٣) يبين التوزيع التكراري لهذه البيانات.

الفئات	الحدود الفعلية	تفريغ البيانات	التكرار	مركز الفئة
٧,٢٧-٧,٢٤	٧,٢٧٥-٧,٢٣٥	///	٤	٧,٢٥٥
٧,٢٨-٧,٢٦	٧,٢٦٥-٧,٢٣٥	---	٥	٧,٢٩٥
٧,٢٩-٧,٢٦	٧,٢٦٥-٧,٢٣٥	/// --- --- ---	١٩	٧,٢٣٥
٧,٢٩-٧,٢٦	٧,٢٥٥-٧,٢٣٥	/// --- ---	١٣	٧,٢٧٥
٧,٤٣-٧,٤٠	٧,٤٣٥-٧,٣٩٥	// ---	٧	٧,٤١٥
٧,٤٧-٧,٤٤	٧,٤٧٥-٧,٤٣٥	//	٢	٧,٤٥٥

جدول رقم (٣)

التوزيع التكراري النسبي: يتم استخراج التكرار النسبي وفق المعادلة التالية:

$$\text{تكرار النسبي لفئة ما} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

والتوزيع الذي يعطينا الفئات أو مراكزها مع التكرار النسبي يسمى توزيع تكراري نسبي.

مثال (٤)، بالرجوع إلى المثال رقم (٢) ابني جدول التكرار النسبي

الحل:

ويجدر بالملاحظة بأن مجموع التكرارات النسبية يجب أن تساوي واحد.

الفئات	التكرار النسبي
٥٤-٥٠	$\frac{1}{80} = 0,0125$
٥٩-٥٥	$\frac{2}{80} = 0,025$
٦٤-٦٠	$\frac{11}{80} = 0,1375$
٦٩-٦٥	$\frac{10}{80} = 0,125$
٧٤-٧٠	$\frac{12}{80} = 0,15$
٧٩-٧٥	$\frac{21}{80} = 0,2625$
٨٤-٨٠	$\frac{6}{80} = 0,075$
٨٩-٨٥	$\frac{9}{80} = 0,1125$
٩٤-٩٠	$\frac{4}{80} = 0,05$
٩٩-٩٥	$\frac{4}{80} = 0,05$
المجموع	١

جدول رقم (٤)

التوزيع التكراري المثنوي: يتم استخراج التكرار المثنوي لكل فئة وفق المعادلة التالية:

تكرار الفئة

$$\text{التكرار المثنوي لفئة ما} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{100\%}$$

والتوزيع الذي يعطينا الفئات أو مراكزها مع التكرار المثنوي يسمى توزيع

تكراري مثنوي.

مثال (٥)، بالرجوع إلى المثال رقم (٣) ابني جدول التكرار المثنوي:

الحل:

ويجدر بالملاحظة بأن مجموع التكرارات المئوية يجب أن تساوي ١٠٠٪.

الفئات	التكرار المئوي
٧,٧٧-٧,٧٤	$28 = 2100 \times \frac{4}{100}$
٧,٣١-٧,٢٨	$210 = 2100 \times \frac{10}{100}$
٧,٢٥-٧,٢٢	$238 = 2100 \times \frac{19}{100}$
٧,٢٩-٧,٢٦	$266 = 2100 \times \frac{13}{100}$
٧,٤٣-٧,٤٠	$214 = 2100 \times \frac{10}{100}$
٧,٤٧-٧,٤٤	$24 = 2100 \times \frac{1}{100}$
المجموع	١٠٠٪

جدول رقم (٥)

(٢-٢-٢) أنواع الجداول (التوزيعات) التكرارية:

- ١- الجدول المنتظم: يكون التوزيع منتظم إذا كان أطوال فئاته متساوية كما في الجدول رقم (٢) & (٣).
- ٢- الجدول غير المنتظم: يكون التوزيع غير منتظم إذا كان أطوال فئاته غير متساوية كما في المثال التالي:

مثال (٦):

ملاحظة: هذا التوزيع غير منتظم لأن
 طول الفئة الأولى = ٦
 طول الفئة الثانية = ٨
 طول الفئة الثالثة = ١٤
 وبالتالي أطوال الفئات غير متساوية

الفئات	التكرار النسبي
٦٥-٦٠	٣
٧٢-٦٦	٤
٨٧-٧٤	٥

جدول (٧)

- ٣- الجدول المقفل: يكون الجدول مقفلاً عندما تكون بداية الفئة الأولى محددة وكذلك نهاية الفئة الأخيرة محددة كما في المثال رقم (٦). حيث أن بداية الفئة الأولى محددة وتساوي (٦٠) ونهاية الفئة الأخيرة محددة وتساوي (٨٧).
- ٤- الجدول المفتوح: ويكون الجدول مفتوح إذا كانت بداية الفئة الأولى أو نهاية الفئة الأخيرة أو كليهما معاً غير محددة كما في المثال (٧).

مثال (٧):

الفئات	التكرار
أقل من ١٠	٢
١٠-٢٠	٤
أكثر من ٢٠	١

جدول (١٠)

الفئات	التكرار
٢٥-٣٠	٧
٣١-٣٦	٨
أكثر من ٣٦	٦

جدول (٩)

الفئات	التكرار
أقل من ٢٠	٣
٢٠-٣٠	٦
٣١-٤٩	٥

جدول (٨)

نلاحظ أن الجداول (٨)، (٩) & (١٠) أمثلة على جداول مفتوحة حيث أن جدول رقم (٨) مفتوح من الأسفل لأن بداية الفئة الأولى غير محددة والجدول رقم (٩) مفتوح من الأعلى لأن نهاية الفئة الأخيرة غير محددة أما الجدول رقم (١٠) مفتوح من الطرفين لأن بداية الفئة الأولى ونهاية الفئة الأخيرة غير محدبتين.

(٣-٢-٢) التوزيع التكراري المتجمع (التراكمي):

في كثير من الأحيان نحتاج لمعرفة عدد البيانات (المفردات) التي تساوي أو تقل قيمتها عن حد معين [أو تساوي أو تزيد عن حد معين]. وللتوصل لهذا النوع من المعلومات نلجأ إلى تكوين الجداول التكرارية التراكمية (المتجمعة) فالجداول المتجمعة هو جدول يبين التكرارات المتجمعة لأكثر من فئة واحدة وهنالك نوعين من التوزيعات التراكمية وهي:

(١) الجدول التكراري التراكمي الصاعد : ويبين مجموع التكرارات للبيانات التي هي أقل أو تساوي حد فعلي معين

مثال (٨): بالرجوع إلى المثال رقم (٢) والجدول (٢) أجب عن الأسئلة التالية:

- ١- كون الجدول التراكمي الصاعد.
- ٢- ما عدد البيانات (العلامات) التي تقل عن العلامة ٧٤,٥.
- ٣- ما عدد العلامات التي تقع بين العلامتين ٥٩,٥ و ٨٤,٥.
- ٤- ما عدد العلامات التي تقل عن أو تساوي العلامة ٧٠.
- ٥- كون الجدول التراكمي النسبي الصاعد.
- ٦- ما نسبة العلامات التي تقل أو تساوي العلامة ٨٧.
- ٧- كون الجدول التراكمي المثوي الصاعد.
- ٨- ما النسبة المثوية للعلامات التي تقل عن العلامة ٦٩,٥.

الحل، (١)

الفئات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلى	التكرار التراكمي الصاعد
٤٩-٤٥	صفر	٤٩,٥	صفر
٥٤-٥٠	١	٥٤,٥	$١ = ١ + ٠$
٥٩-٥٥	٢	٥٩,٥	$٣ = ٢ + ١$
٦٤-٦٠	١١	٦٤,٥	$١٤ = ١١ + ٣$
٦٩-٦٥	١٠	٦٩,٥	$٢٤ = ١٠ + ١٤$
٧٤-٧٠	١٢	٧٤,٥	$٣٦ = ١٢ + ٢٤$
٧٩-٧٥	٢١	٧٩,٥	$٥٧ = ٢١ + ٣٦$
٨٤-٨٠	٦	٨٤,٥	$٦٣ = ٦ + ٥٧$
٨٩-٨٥	٩	٨٩,٥	$٧٢ = ٩ + ٦٣$
٩٤-٩٠	٤	٩٤,٥	$٧٦ = ٤ + ٧٢$
٩٩-٩٥	٤	٩٩,٥	$٨٠ = ٤ + ٧٦$
المجموع	٨٠		

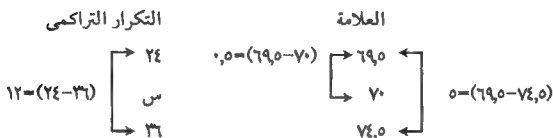
جدول (١١)

ملاحظات حول الجدول رقم (١١).

- أ - أضفنا فئة في بداية الجدول تكرارها صفر لغايات الرسم.
- ب- جدول نبدأ فيه بتجميع التكرارات من الأعلى إلى الأسفل للجدول فمثلاً
تكرار التراكمي للفئة الأولى (٥٤-٥٠) = تكرار الفئة الأولى (٥٤-٥٠) = ١
تكرار التراكمي للفئة الثانية = تكرار الفئة الأولى + تكرار الفئة الثانية
 $٣ = ٢ + ١ =$ وهكذا
- بينما تكرار التراكمي للفئة الأخيرة (٩٩-٩٥) = مجموع التكرارات = ٨٠.
- ج- يستخدم الجدول لإيجاد عدد المفردات التي تقل أو تساوي مفردة معينة
- ٢- عدد العلامات التي تقل عن العلامة (٧٤,٥) = التكرار التراكمي الصاعد المقابل لهذه العلامة وبالتالي يساوي ٣٦ وهذا يعني بأن هنالك ٣٦ علامة تقل عن العلامة (٧٤,٥).
- ٣- عدد العلامات التي تقع بين العلامتين ٥٩,٥ و ٨٤,٥ تساوي التكرار التراكمي المقابل للعلامة ٨٤,٥ مطروحاً منه التكرار التراكمي المقابل للعلامة ٥٩,٥ وبالتالي عدد العلامات = $٦٠ = ٣ - ٦٣$.

٤- بما أن العلامة ٧٠ لم ترد في الحدود الفعلية بشكل صريح سنلجأ إلى النسبة والتناسب كالتالي:

❖ العلامة ٧٠ تقع ضمن الحدين الفعلين ٦٩,٥ ، ٧٤,٥



$$\text{وبالتالي س} = ٢٤ - ١٢ \times \frac{٠,٥}{٥} = ٢٤ - ١,٢ = ٢٢,٨$$

وعندئذ هنالك تقريباً (٢٥) علامة تقل عن العلامة (٧٠).

٥- إذا تم استبدال التكرار التراكمي الصاعد بالتكرار النسبي الصاعد فإننا نحصل على الجدول التراكمي النسبي الصاعد كما في الجدول رقم (١٢).

الفئات	التكرار النسبي	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي النسبي الصاعد
٤٥-٤٩	صفر	٤٩,٥	صفر
٥٠-٥٤	٠,٠١٢٥	٥٤,٥	٠,٠١٢٥ = ٠ + ٠,٠١٢٥
٥٥-٥٩	٠,٠٢٥	٥٩,٥	٠,٠٣٧٥ = ٠,٠١٢٥ + ٠,٠٢٥
٦٠-٦٤	٠,١٣٧٥	٦٤,٥	٠,١٧٥ = ٠,٠٣٧٥ + ٠,١٣٧٥
٦٥-٦٩	٠,١٢٥	٦٩,٥	٠,٣٠ = ٠,١٢٥ + ٠,١٧٥
٧٠-٧٤	٠,١٥	٧٤,٥	٠,٤٥ = ٠,٣٠ + ٠,١٥
٧٥-٧٩	٠,٢٦٢٥	٧٩,٥	٠,٧١٢٥ = ٠,٤٥ + ٠,٢٦٢٥
٨٠-٨٤	٠,٠٧٥	٨٤,٥	٠,٧٨٧٥ = ٠,٧١٢٥ + ٠,٠٧٥
٨٥-٨٩	٠,١١٢٥	٨٩,٥	٠,٩٠ = ٠,٧٨٧٥ + ٠,١١٢٥
٩٠-٩٤	٠,٠٥	٩٤,٥	٠,٩٥ = ٠,٩٠ + ٠,٠٥
٩٥-٩٩	٠,٠٥	٩٩,٥	١ = ٠,٩٥ + ٠,٠٥

جدول (١٢)

٦- العلامة ٨٧ تقع ضمن الحدين الفعلين ٨٤,٥ ، ٨٩,٥ .



$$\diamond \text{ س } = 0,7875 \times \frac{2,5}{0} + 0,7875 = 0,84375$$

أي أن نسبة العلامات التي تقل عن العلامة ٨٧ تساوي (٠,٨٤٣٧٥).
٧- إذا تم استبدال التكرار الصاعد بالتكرار التراكمي المتوي الصاعد لحصل على جدول التراكمي المتوي الصاعد كما في الجدول (١٣).

الفئات	التكرار المتوي	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي المتوي الصاعد
٤٥-٤٩	صفر %	٤٩,٥	صفر %
٥٠-٥٤	١,٢٥ %	٥٤,٥	١,٢٥ %
٥٥-٥٩	٢,٥ %	٥٩,٥	٣,٧٥ %
٦٠-٦٤	١٣,٧٥ %	٦٤,٥	١٧,٥ %
٦٥-٦٩	١٢,٥ %	٦٩,٥	٣٠ %
٧٠-٧٤	١٥ %	٧٤,٥	٤٥ %
٧٥-٧٩	٢٦,٢٥ %	٧٩,٥	٧١,٢٥ %
٨٠-٨٤	٧,٥ %	٨٤,٥	٧٨,٧٥ %
٨٥-٨٩	١١,٢٥ %	٨٩,٥	٩٠ %
٩٠-٩٤	٥ %	٩٤,٥	٩٥ %
٩٥-٩٩	٥ %	٩٩,٥	١٠٠ %

جدول (١٣)

٨- النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن العلامة ٦٩,٥ يساوي التكرار المتوي التراكمي المقابل لهذه العلامة. وبالتالي فالنسبة المئوية = ٣٠ %.

ب- الجدول التكراري التراكمي الهابط = وهو الجدول الذي يبين مجموع التكرار للمفردات التي تساوي أو هي أكبر من حد فعلي ما.

مثال (٩)، بالرجوع إلى المثال رقم (٣) والجدول رقم (٣) أجب عن الأسئلة التالية:

- ١- كون الجدول التكراري المتجمع الهابط.
- ٢- عدد الكرات التي أقطارها تزيد أو تساوي (٧,٣٩٥).
- ٣- نسبة الكرات التي أقطارها تزيد عن أو تساوي (٧,٤٣٥).

الحل: (١)

الفئات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي الهابط
٧,٢٧-٧,٢٤	٤	٧,٢٣٥	٥٠ = ٤ + ٥ + ١٩ + ١٣ + ٧ + ٢ + ٠
٧,٢٦-٧,٢٨	٥	٧,٢٧٥	٤٦ = ٥ + ١٩ + ١٣ + ٧ + ٢ + ٠
٧,٣٥-٧,٣٢	١٩	٧,٣٦٥	٤١ = ١٩ + ١٣ + ٧ + ٢ + ٠
٧,٣٩-٧,٣٦	١٣	٧,٣٥٥	٢٢ = ١٣ + ٧ + ٢ + ٠
٧,٤٣-٧,٤٠	٧	٧,٣٩٥	٩ = ٧ + ٢ + ٠
٧,٤٧-٧,٤٤	٢	٧,٤٣٥	٢ = ٠ + ٢
٧,٥١-٧,٤٨	صفر	٧,٤٧٥	صفر

جدول (١٤)

ملاحظات حول الجدول رقم (١٤):

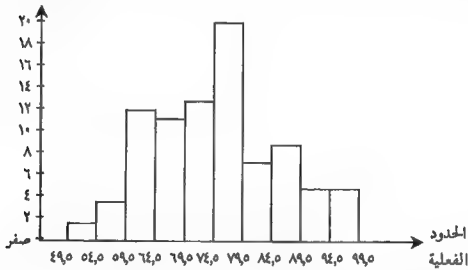
- ١- أضفنا فئة في نهاية الجدول تكرارها صفر.
- ٢- جدول نبدأ فيه بتجميع التكرارات من أسفل الجدول إلى أعلاه.
- ٣- التكرار التراكمي الهابط للفئة الأولى يساوي مجموع التكرارات.
- ٤- التكرار التراكمي الهابط للفئة الأخيرة يساوي تكرار الفئة الأخيرة.
- ٥- يستخدم الجدول لإيجاد عدد التكرارات التي تساوي أو تزيد عن مفردة ما.
- ٢- عدد الكرات التي أقطارها تزيد أو تساوي (٧,٣٩٥) يساوي التكرار التراكمي الهابط المقابل للقطر (٧,٣٩٥) وبالتالي عدد الكرات = ٩.
- ٣- نسبة الكرات التي أقطارها يزيد أو يساوي (٧,٤٣٥) تساوي التراكمي النسبي الهابط ويساوي $\frac{2}{0.4} = 0.4$.

(٣-٢) تمثيل الجداول التكرارية بيانياً:

هنالك ثلاث طرق رئيسية لتمثيل الجداول بيانياً وهي:

١- **المدرج التكراري**، وهي عبارة عن تمثيل تكرار كل فئة من فئات التوزيع التكراري بمستطيل حدود قاعدته الحدود الفعلية لتلك الفئة وارتفاعه يتناسب مع تكرارها. أي أننا نأخذ محورين متعامدين نرصد على المحور الأفقي الحدود الفعلية لكل فئة من فئات التوزيع ونقيم على كل فئة مستطيلاً يتناسب ارتفاعه مع تكرار تلك الفئة.

مثال (١٠): بالرجوع إلى الجدول رقم (٢) مثل الجدول باستخدام المدرج التكراري:

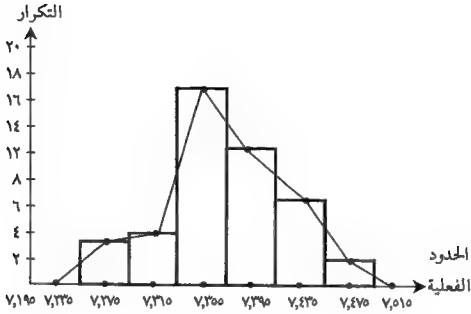


خصائص المدرج: المساحة الكلية له تتناسب مع التكرار الكلي الذي يمثلته ومساحة كل مستطيل تتناسب مع تكرار الفئة الذي تمثله هذه المساحة.

٢- **المضلع التكراري**، هنالك طريقتان لرسم المضلع التكراري هما:

أ - باستخدام المدرج التكراري: يمكن الحصول على المضلع التكراري بتصنيف القواعد العليا للمستطيلات كنقاط ثم وصل هذه النقاط ويجب إقفال المضلع التكراري مع المحور الأفقي وذلك بافتراض وجود فئة قبل الفئة الأولى بنفس طول الفئات ولكن تكرارها صفر ووجود فئة بعد الفئة الأخيرة بنفس طول الفئات ذات تكرار صفر حيث يوصل طرفا المضلع التكراري بمركزي هاتين الفئتين فيتم إقفاله والشكل (٢) يبين المضلع التكراري المرسوم على المدرج.

مثال (١١): بالرجوع إلى المثال (٣) والجدول الوارد فيه ارسم المضلع التكراري باستخدام المدرج.



شكل (٢)

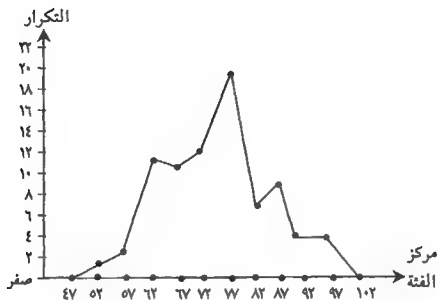
ب- بدون استخدام المدرج التكراري: يتم بأخذ محورين متعامدين نعين على المحور الأفقي مراكز الفئات وعلى المحور الرأسي التكرارات ويتم إقفاله عن طريق أخذ مركز فئة تسبق الفئة الأولى بنفس طول الفئات ذات تكرار صفر ومركز فئة تلحق الفئة الأخيرة بنفس الطول ذات تكرار صفر ثم أقفل المضلع بإيصال النقاط التي إحداثياتها (مركز الفئة، تكرار الفئة) مع بعضها بخطوط مستقيمة).

مثال (١٢): مثل الجدول رقم (٢) باستخدام المضلع التكراري.

الحل: خطوات الرسم:

- ١- نرسم محورين متعامدين.
- ٢- نعين مراكز الفئات على المحور الأفقي وتكرارات الفئات على المحور العمودي.
- ٣- يتم التوصيل بين النقاط التالية: (٤٧، صفر)، (١٠٥٢)، (٢٠٥٧)، (١١٠٦٢)، (١٠٠٦٧)، (١٢٠٧٢)، (٢١٠٧٧)، (٦٨٢)، (٩٨٧)، (٤٠٩٢)، (٤٠٩٧)، (١٠٢، صفر) بخطوط منكسرة.

والشكل رقم (٣) يبين المضلع التكراري.



شكل (٣)

خواص المضلع التكراري: أن المساحة تحت المضلع التكراري تساوي مساحة المدرج التكراري وذلك لأن كل ضلع من أضلاع المضلع يحذف من المدرج مثلاً وفي نفس الوقت يضيف إليه مثلاً مساوياً له المساحة. لاحظ الشكل (٢).

٣- المنحنى التكراري: إذا مهدنا المضلع التكراري وجعلناه منحنى بدلاً من الخطوط المنكسرة فإننا نحصل على المضلع التكراري وينبغي عدم رسم المنحنى التكراري إلا إذا كانت الفئات كثيرة العدد ذات طول صغير وكان عدد البيانات كبيراً وكانت هذه البيانات من النوع المتصل كدرجة الحرارة والعمر.

ملاحظات:

- ١- إذا استبدلنا التكرار بالتكرار النسبي ورسمنا المدرج أو المضلع أو المنحنى فإننا نحصل على المدرج أو المضلع أو المنحنى التكراري النسبي.
- ٢- إذا استبدلنا التكرار بالتكرار المثنوي ورسمنا المدرج أو المضلع أو المنحنى فإننا نحصل على المدرج أو المضلع أو المنحنى التكراري المثنوي.

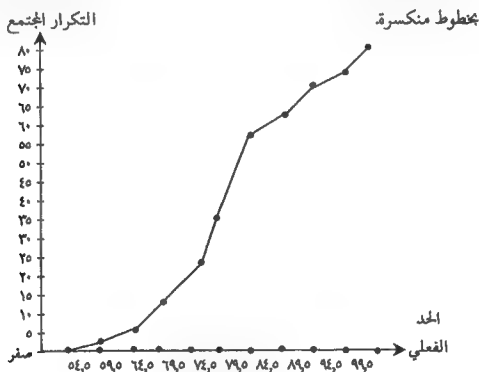
(٤-٢) تمثيل التوزيعات التراكمية بيانياً:

- ١- المضلع التكراري المتجمع الصاعد: نحصل على المضلع التكراري المتجمع الصاعد برصد التكرار التراكمي الصاعد لأي فئة مقابل الحد الفعلي ثم وصل النقاط

بخطوط مستقيمة. أي أننا نأخذ محورين متعامدين نعين على المحور الأفقي الحد الفعلي للفترة والتكرار التراكمي على المحور الرأسي ثم وصل النقاط التي إحداثياتها (الحد الفعلي، التكرار التراكمي الصاعد) مع بعضها البعض بخطوط منكسرة. مثال (١٣)، بالرجوع والاستعانة بالجدول رقم (١١) ارسم المصطلح المتجمع الصاعد.

الحل، خطوات الرسم:

- ١- نرسم محورين متعامدين.
- ٢- نعين على المحور الأفقي الحدود الفعلية للفتحات.
- ٣- نعين على المحور العمودي (الرأسي) التكرار التراكمي.
- ٤- يتم التوصيل بين النقاط التالية: (٤٩,٥)، (١٠٥٤,٥)، (٣٠٥٩,٥)، (١٤٠٦٤,٥)، (٢٤٠٦٩,٥)، (٣٣٠٧٤,٥)، (٥٧٠٧٩,٥)، (٦٣٠٨٤,٥)، (٧٣٠٨٩,٥)، (٧٦٠٩٤,٥)، (٩٩٠٩٥,٥)، (٨٠٠٩٩,٥)



شكل (٤)

٢- المصطلح التكراري المتجمع الهابط: نحصل على المصطلح التكراري المتجمع الهابط برصد التكرار التراكمي الهابط لأي فترة مقابل الحد الفعلي ثم وصل هذه النقاط بخطوط منكسرة أي أننا نأخذ محورين متعامدين ثم نعين على المحور الأفقي الحد الفعلي للفترة وعلى المحور العمودي التكرار التراكمي ثم وصل النقاط التي إحداثياتها

(الحد الفعلي، التكرار الهابط) مع بعضها البعض بخطوط منكسرة (مستقيمة).
مثال (١٤): بالاستعانة بالجدول أدناه رقم (١٥) ارسم المصّلع المتجمع الهابط.

الفئات	التكرار	أكبر من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي هابط
١٤-١٠	٥	٩٥	٦٠
١٩-١٥	٧	١٤,٥	٥٥
٢٤-٢٠	٨	١٩,٥	٤٨
٢٩-٢٥	١٢	٢٤,٥	٤٠
٣٤-٣٠	٣	٢٩,٥	٢٨
٣٩-٣٥	٤	٣٤,٥	٢٥
٤٤-٤٠	١١	٣٩,٥	٢١
٤٩-٤٥	٥	٤٤,٥	١٠
٥٤-٥٠	٥	٤٩,٥	٥
		٥٤,٥	صفر

الجدول (١٥)

الحل: المصّلع التكراري المتجمع الهابط
كما في الشكل (٥)



شكل (٥)

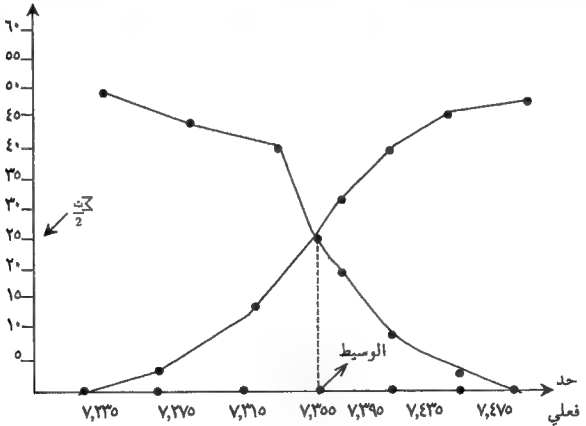
مثال (١٥): بالاستعانة بالجدول (١٦) أدناه ارسم المنحنى المتجمع الصاعد والهابط

على نفس الشكل؟ وعلق على الرسم؟

الفتلات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار متجمع صاعد	أكبر من أو يساوي حد فعلي	تكرار متجمع هابط
٧,٢٣-٧,٢٠	صفر	٧,٢٣٥	صفر	٧,٢٣٥	٥٠
٧,٢٧-٧,٢٤	٤	٧,٢٧٥	٤	٧,٢٧٥	٤٦
٧,٣١-٧,٢٨	٥	٧,٣١٥	٩	٧,٣١٥	٤١
٧,٣٥-٧,٣٢	١٩	٧,٣٥٥	٢٨	٧,٣٥٥	٢٢
٧,٣٩-٧,٣٦	١٣	٧,٣٩٥	٤١	٧,٣٩٥	٩
٧,٤٣-٧,٤٠	٧	٧,٤٣٥	٤٨	٧,٤٣٥	٢
٧,٤٧-٧,٤٤	٢	٧,٤٧٥	٥٠	٧,٤٧٥	صفر
٧,٥١-٧,٤٨	صفر				

التكرار التراكمي

جدول (١٦)



شكل (٦)

ينقطع المنحنى المتجمع الصاعد والهابط بنقطة الإحداثي الأفقي هذه

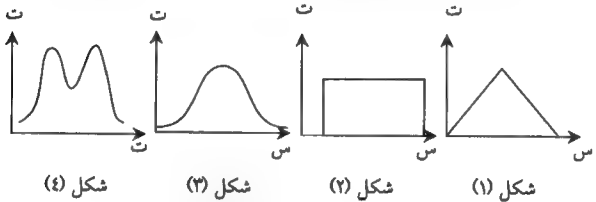
الوسيط والإحداثي الرأسي لها هو مجموع التكرارات مقسوماً على ٢.

(٥-٢) أشكال التوزيعات التكرارية:

يبنى وصف البيانات الإحصائية على ثلاثة عناصر رئيسية هي: (١) الشكل
(٢) النزعة المركزية (٣) التشتت.

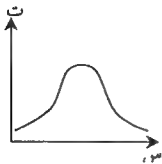
وسنعمل الآن على دراسة شكل التوزيع التكراري: هنالك خواص تميز بها شكل التوزيع منها:

أ - خاصية التماثل للتوزيع وعلمه: فيكون التوزيع متماثلاً إذا استطعنا إقامة عمود على المحور الأفقي بحيث يقسم هذا العمود التوزيع إلى قسمين ينطبقان على بعضهما تمام الانطباق. والأشكال (١-٤) تمثل بعض التوزيعات المتماثلة.



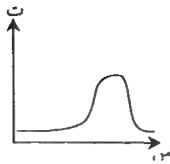
ويجدر بالملاحظة أنه في التوزيعات المتماثلة بأن المشاهدات المتساوية البعد عن عمود التماثل لها نفس التكرارات.

أما في التوزيعات التي يكون عدم تماثلها واضحاً فتسمى توزيعات ملتوية. ويكون التوزيع ملتوياً إذا امتد أحد طرفيه يساراً أو يميناً كثيراً. وكذلك يكون التوزيع ملتوياً إذا كانت القمة العالية فيه بعيدة عن المركز، أي إذا كان عالياً من جهة ومنخفضاً من جهة أخرى والأشكال (٥-٧) تمثل بعض التوزيعات الملتوية.



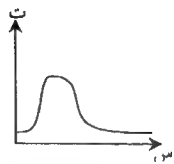
معتدل الالتواء

شكل (٧)



ملتو نحو اليسار (سالب
الالتواء)

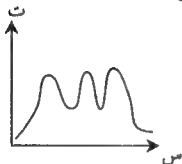
شكل (٦)



التوزيع ملتو نحو اليمين
(موجب الالتواء)

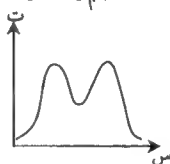
شكل (٥)

ب- الخاصية الثانية من حيث عدد القمم لاحظ الأشكال (٨-١٠).



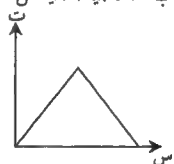
توزيع ذو ثلاث قمم

شكل (١٠)



توزيع ذو قمتين

شكل (٩)



أحادي القمة (قمة واحدة)

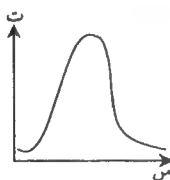
شكل (٨)

خاصية التفرطح: الأشكال (١١-١٣) توضح هذه الخاصية:



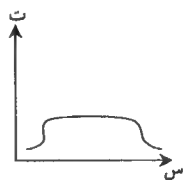
معتدل التفرطح

شكل (١٣)



مدبب

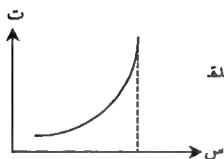
شكل (١٢)



مفرطح

شكل (١١)

ومن الجدير ذكره أن هنالك بعض التسميات لبعض أشكال التوزيعات التكرارية.



الشكل (١٤)

١- التوزيع الرائي كما يوضح الشكل (١٤).

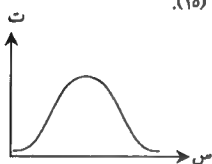
خصائصه: ملتو نحو اليسار له قمة واحدة.



شكل (١٥)

٢- التوزيع المتجانس كما يوضح الشكل (١٥).

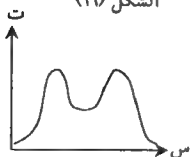
خصائصه: متماثل.



الشكل (١٦)

٣- التوزيع الناقوسي (الجرس) كما يوضح الشكل (١٥).

خصائصه: متماثل، أحادي القمة.



الشكل (١٧)

٤- توزيع U كما يوضح الشكل (١٧).

خصائصه: توزيع متماثل له قمتين.

تمارين الوحدة الثانية

س١ : الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة في الأعوام ١٨٤٠-١٩٥٠.

السنة	١٨٤٠	١٨٥٠	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠
العمال الزراعيين بالمليون	٣,٧	٤,٩	٦,٢	٦,٩	٨,٦	٩,٩	١٠,٩	١١,٦	١١,٤	١٠,٥	٨,٨	٦,٨
العمال غير الزراعيين بالمليون	١,٧	٢,٨	٤,٣	٦,١	٨,٨	١٣,٤	١٨,٢	٢٥,٨	٣٦	٣٨,٤	٤٢,٩	٥٢,٢

المصدر: مصلحة التجارة مكتب التعدادات.

أعرض هذه البيانات باستخدام (١) الخط البياني. (٢) الأعمدة البيانية.

س٢: الجدول التالي يبين ارتفاعات أعلى سبعة مباني ومنشآت في العالم.

المكان	نيويورك	نيويورك	باريس	نيويورك	نيويورك	نيويورك	نيويورك
الارتفاع بالمتر	٣٨١	٣٦٩	٣٠٠	٢٩٠	٢٨٣	٢٥٩	٢٤١
المبنى أو المنشأة	مبنى الامبيرست	مبنى كريزلر	برج إيفل	مبنى وول ستريت	بنك مانهاتن	مركز روكفلر	مبنى ولورث

أعرض هذه البيانات بطريقتين.

س٣: الجدول التالي يبين السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية:

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة كم/ثانية	٤٧,٨	٣٥,١	٢٩,٨	٢٤,١	١٣	٩,٧	٦,٨	٥,٥	٤,٨

اعرض هذه البيانات بطريقتين:

س٤: الجدول التالي يبين المساحة بـمليون الكيلومترات المربعة لمخيطات العالم.

المخيط	الهادي	الأطلنطي	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة مليون كم ^٢	١٨٣,٤	١٠٦,٧	٨٣,٨	١٩,٧	١٢,٤

اعرض هذه البيانات بطريقة (١) المستطيلات. (٢) الدائرة.

س٥: صمم جدولاً لتعرض فيه توزيع الطلبة في كليتك حسب التخصص والجنس.

س٦: فيما أعداد القلمين للأردن عبر حدود المملكة من مختلف الجنسيات خلال الأعوام ١٩٩٥، ١٩٩٦، ١٩٩٧، ١٩٩٨.

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨
أردني	١٨٥٢٠٠	١٩٥١٠٠	٢٠١٠٠٠	١٧٥٩٠٠
عربي غير أردني	١٥٠٣٥٠	١٣٧٥٠٠	١٩٦٢٠١	١٨٥٠٠٠
أجنبي	١٦١٣٠٠	٢١١٩٠٠	٢٢٠٣٥٠	٢١٠٩٠٠

اعرض هذه البيانات:

(١) الأعمدة البيانية.

(٢) القطاع الدائري لكل سنة على حدة.

(٣) مثل الفرق بين القلمين العرب غير الأردنيين والأجانب لكل سنة على حدة.

س٧: البيانات التالية تمثل علامات (٦٠) طالباً في ملة الإحصاء التربوي في إحدى

الجامعات:

61	88	80	72	65	86	43	62	77	61
77	68	81	63	76	84	42	65	98	92
63	58	91	74	54	93	48	77	85	63
81	73	64	75	63	92	45	68	86	64
82	94	75	76	73	91	61	55	74	85
84	49	72	81	82	88	72	45	77	71

- ١- ضع هذه البيانات في جدول تكراري.
 - ٢- ارسم المدرج التكراري للتوزيع.
 - ٣- ارسم المضلع التكراري للتوزيع.
 - ٤- ارسم المنحنى التكراري للتوزيع.
 - ٥- ابني الجدول التكراري النسبي.
 - ٦- ارسم المضلع التكراري النسبي.
 - ٧- ابني الجدول التكراري المثنوي.
 - ٨- ارسم المدرج التكراري المثنوي.
 - ٩- ابني الجدول التكراري المتجمع الصاعد.
 - ١٠- ارسم المضلع المتجمع الصاعد.
 - ١١- ابني الجدول التكراري المتجمع الهابط.
 - ١٢- ارسم المضلع المتجمع الهابط.
- س٨: البيانات التالية تمثل أقطار (٣٠) كرة مصنوعة في شركة ما.

٧,٤	٨,١	٦,٤	٧,٤	٦,٣	٨,٣
٧,٣	٧,٢	٦,٥	٧,٥	٧,٠	٦,١
٦,٨	٧,٣	٦,٧	٧,٩	٨,٠	٧,٢
٨,١	٦,٥	6,6	٨,٢	٦,٨	٧,٤
٨,٢	٦,٧	7,7	٨,١	٦,٧	٧,٥

- ١- ضع هذه البيانات في جدول تكراري عدد فئاته (٥).
- ٢- كوّن الجدول المتجمع النسبي الصاعد
- ٣- ارسم المضلع المتجمع النسبي الصاعد

- ٤- كون الجدول المتجمع المثوي الهابط.
- ٥- ارسم المصطلح المتجمع المثوي الهابط.
- ٩س، الجدول أدناه يبين التوزيع التكراري للعمر الإنتاجي لـ ٤٠٠ لبة راديو التي اختبرت في شركة ما للمببات.

العمر الإنتاجي (بالساعات)	عدد اللببات
٣٠٠-٣٩٩	١٤
٤٠٠-٤٩٩	٤٦
٥٠٠-٥٩٩	٥٨
٦٠٠-٦٩٩	٧٦
٧٠٠-٧٩٩	٦٨
٨٠٠-٨٩٩	٦٢
٩٠٠-٩٩٩	٤٨
١٠٠٠-١٠٩٩	٣٢
١١٠٠-١١٩٩	٦
المجموع	٤٠٠

المطلوب:

- ١- الحد الأعلى للفئة الخامسة.
- ٢- الحد الأدنى للفئة الثامنة.
- ٣- مركز الفئة السابعة.
- ٤- الحدود الفعلية للفئة الأخيرة.
- ٥- طول الفئة.
- ٦- تكرار الفئة الرابعة.
- ٧- التكرار النسبي للفئة السادسة.
- ٨- النسبة المئوية للمببات التي لا يتجاوز عمرها الإنتاجي ٦٠٠ ساعة.
- ٩- النسبة المئوية للمببات التي لا يقل عمر الإنتاجي عن ٥٠٠ ساعة.
- ١٠- ارسم المدرج التكراري.

- ١١- ارسم المضلع التكراري. ١٢- ارسم المضلع المتجمع النسبي.
- س١٠: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للزمن (لأقرب ثانية) الذي استغرقه (٦٠) رياضي لقطع مسافة (٢٠٠) متر.

الزمن	عدد الرياضيين
٣٩-٣٥	٥
٤٤-٤٠	٨
٤٩-٤٥	١٢
٥٤-٥٠	٢٠
٥٩-٥٥	٨
٦٤-٦٠	٧

المطلوب:

- ١- ما هي الحدود الفعلية للفئات وما هي مراكزها.
 - ٢- أوجد التوزيع التكراري النسبي وارسم مضلعه.
 - ٣- أوجد التوزيع المتجمع الصاعد.
 - ٤- عدد الرياضيين الذين قطعوا المسافة في زمن أقل من (٥٤,٥) ثانية.
 - ٥- نسبة الرياضيين التي قطعوا المسافة في زمن أقل من (٤٤,٥) ثانية.
 - ٦- أوجد نسبة الرياضيين الذي قطعوا المسافة في زمن أقل من أو يساوي (٥٢) ثانية.
 - ٧- أوجد التوزيع المتجمع الهابط.
 - ٨- أوجد عدد الرياضيين الذين قطعوا المسافة في زمن لا يقل عن ٤٤,٥ ثانية.
- س١١: إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكراري لأعمار (٧٠) طالباً في مدرسة ثانوية هي: ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠ أوجد طول الفئة والحدود الفعلية لكل فئة إذا كانت الأعمار قد سجلت لأقرب سنة.

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

- مفهوم النزعة المركزية.

(١-٣) الوسط الحسابي.

(٢-٣) الوسيط.

(٣-٣) المنوال.

(٤-٣): العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال.

(٥-٣): خصائص مقاييس النزعة المركزية.

(٦-٣): المئينات والربيعات والعشيرات.

(١-٦-٣): المئينات.

(٢-٦-٣): الربيعات.

(٣-٦-٣): العشيرات.

(٧-٣): الرتب المئينية.

(٨-٣) مسائل محلولة.

تمارين الوحدة

.

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

مفهوم النزعة المركزية: هنالك ميل لأن تتجمع المفردات في التوزيعات المختلفة حول قيمة معينة من التوزيع، وهذا الميل يسمى النزعة المركزية أي نزعة المفردات المختلفة للتجمع حول مركز معين.

وهكذا فإن النزعة المركزية يمكن تعريفها بأن ميل معظم المفردات المختلفة للتمركز حول نقطة أو قيمة واحدة تسمى القيمة المتوسطة، فالقيمة المتوسطة لمجموعة من المشاهدات هي قيمة مجدها من مجموعة المشاهدات لتمثل البيانات (المفردات) بشكل مقبول.

مقاييس النزعة المركزية: للنزعة المركزية مقاييس عديدة أهمها:

١- الوسط الحسابي ٣- المنوال.

٢- الوسيط ٤- المئينات.

ولكن من هذه المقاييس عيوبه ومزاياه وبالتالي لا نستطيع تفضيل بعضها على بعض بشكل مطلق. وسندرس كل مقياس من هذه المقاييس بالتفصيل.

(١-٣) الوسط الحسابي:

يعرف الوسط الحسابي بأنه مجموع القيم مقسوماً على عددها:

(١-٣) في حالة المشاهدات المفردة:

سنستخدم طريقتين لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العامة): ليكن لدينا المشاهدات من x_1, x_2, \dots, x_n فإن الوسط الحسابي (\bar{x}) يعرف كالتالي:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{r=1}^n X_r}{n}$$

ويقصد بـ $\sum_{r=1}^n X_r$ مجموع المشاهدات $[X_1 + X_2 + \dots + X_n]$.

ملاحظة: سنكتب للاختصار $\sum_{r=1}^n X_r$ بدلاً من $\sum_{r=1}^n X_r$.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{r=1}^n X_r}{n} \quad (1)$$

ولتوضيح مفهوم الوسط الحسابي سنورد الأمثلة التالية:

مثال (١): أوجد الوسط الحسابي للقيم ١٧، ١٦، ٣٠، ٢٠، ١٥، ١٦.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{17 + 16 + 30 + 20 + 15 + 16}{6}$$

$$\bar{X} = \frac{114}{6} = 19$$

مثال (٢): أوجد الوسط الحسابي للمشاهدات: ٦٧، ٦٣، ٩١، ٩٤، ١٠٠، ٥٤، ٧١، ٨٠، ٩٥.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{r=1}^n X_r}{n} = \frac{67 + 63 + 91 + 94 + 100 + 54 + 71 + 80 + 95}{9} = \frac{715}{9} = 79.44$$

مثال (٣): كانت علامات أحمد في إحدى الفصول المدرسية كالتالي: ٨٤، ٩٦، ٨٢، ١٠٠.

أحسب المعدل الفصلي لأحمد.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع العلامات}}{\text{عددها}} = \frac{84 + 96 + 82 + 100}{4} = \frac{362}{4} = 90.5$$

الطريقة الثانية (طريقة الوسط القرضي): ليكن لدينا مجموعة من المشاهدات

س، س، س، س، س، س، فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي يعرف كالتالي:

$$\bar{س} = \frac{\sum x}{n} + ف \quad (2) \dots\dots\dots$$

حيث ف: الوسط الفرضي (قيمة افتراضية نفترضها إحدى القيم التي لدينا أو أي قيمة أخرى).

ح: الحراف القيمة عن الوسط الفرضي أي أن ح = س - ف.

مثال (٤): مستخدماً طريقة الوسط الفرضي احسب الوسط الحسابي للقيم التالية: ٦٧، ٨٥، ٨٠، ٧٥، ٦٠، ٥٥.

الحل، لنختار الوسط الفرضي (ف) = ٧٥.

$$\sum (س - ف) = (٧٥ - ٥٥) + (٧٥ - ٦٠) + (٧٥ - ٧٥) + (٧٥ - ٨٠) + (٧٥ - ٨٥) + (٧٥ - ٦٧) = ٢٨ -$$

$$\sum ح = ٢٨ - ٢٠ - ١٥ - ٠ + ٥ + ١٠ + ٨ - = ٢٨ -$$

$$\frac{٢٨}{٦} - ٧٥ = \frac{٢٨}{٦} + ٧٥ = \bar{س} \quad \text{ينتج: (٢)}$$

$$٧٠,٣٣ = ٤,٦٧ - ٧٥ =$$

ملاحظة: لا يتغير الوسط الحسابي بتغيير الوسط الفرضي ولبيان هذه الخاصية لنختار في المثال السابق وسطاً فرضياً (٨٠).

فلاحظ بأن:

$$\sum ح = (٨٠ - ٥٥) + (٨٠ - ٦٠) + (٨٠ - ٧٥) + (٨٠ - ٨٠) + (٨٠ - ٨٥) + (٨٠ - ٦٧) = ٥٨ -$$

$$\text{الآن بتطبيق المعادلة (٢) ينتج أن: } \bar{س} = \frac{٥٨}{٦} - ٨٠ = ٩,٦٧ - ٨٠ = ٧٠,٣٣$$

ثانياً، في حالة المشاهدات المتكررة:

هنالك طريقتان هما:

الطريقة العامة: ليكن لدينا المشاهدات س، س، س، س، والتكرارات المقابلة هي ك، ك، ك، ك، ك، ك، على الترتيب فإن الوسط الحسابي يعرف كالتالي:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب المشاهدات بالتكرارات المقابلة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\frac{س_1 ك_1 + + س_م ك_م}{ك_1 + + ك_م} =$$

$$\text{أي أن: } \bar{س} = \frac{\sum س_ك}{ك} \quad (٣) \quad \dots\dots\dots$$

مثال (٥): الجدول التالي يبين أوزان خمسين شخص أحسب الوسط الحسابي (معدل) الأوزان.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠
عدد الأشخاص (ك)	٩	١٠	١١	٦	٤	١٠

الحل:

مجموع حواصل ضرب الأوزان بعدد الأشخاص المقابل
الوسط الحسابي للأوزان =

$$\begin{aligned} & \frac{س_1 ك_1 + س_2 ك_2 + + س_م ك_م}{ك_1 + ك_2 + + ك_م} = \\ & \frac{١٠ \times ٨٠ + ٤ \times ٧٥ + ٦ \times ٧٠ + ١١ \times ٦٥ + ١٠ \times ٦٠ + ٩ \times ٥٥}{١٠ + ٤ + ٦ + ١١ + ١٠ + ٩} = \\ & \frac{٣٣٠}{٥٠} = \frac{٨٠ + ٣٠٠ + ٤٢٠ + ٧١٥ + ٦٠٠ + ٤٩٥}{٥٠} = ٦٦,٦ \end{aligned}$$

مثال (٦): إليك الجدول التالي الذي يبين علامات غير في أحد الفصول الدراسية الجامعية.

العلامة	١٠١ ت	١٠١ ر	١٠١ ف	١٠١ ك	١٠١ ق
العلامة	٨٠	٩٠	٦٥	٨٢	٨٠
عدد الساعات المعتمدة	٣	٢	١	٦	٣

الحل: معدل غير الفصلي = مجموع حواصل ضرب علامات المواد بساعاتها المعتمدة

$$\begin{aligned} & \frac{\text{مجموع الساعات المعتمدة}}{٣ \times ٨٠ + ٦ \times ٨٢ + ١ \times ٦٥ + ٢ \times ٩٠ + ٣ \times ٨٠} = \\ & \frac{٨١,١٣}{١٥} = \end{aligned}$$

الطريقة الثانية (طريقة الوسط الفرضي): ليكن لدينا المشاهدات $س_١, س_٢, س_٣, \dots, س_م$ والتكرارات المقابلة هي $ك_١, ك_٢, ك_٣, \dots, ك_م$ فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (ف) يعرف كالتالي:

$$\bar{م} = \bar{ف} + \frac{\sum ح \times ك}{ك} \quad (٤)$$

حيث ف: الوسط الفرضي، ح = س - ف

خطوات الحل:

- ١- اختيار وسط فرضي (ف) ويفضل أن تكون القيمة ذات أكبر تكرار.
 - ٢- حساب الانحرافات (ح).
 - ٣- ضرب الانحرافات (ح) بالتكرار المقابل.
 - ٤- إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة الثالثة.
- ولتوضيح هذه الطريقة نورد المثال التالي:
- مثال (٧)، الجدول التالي يبين أعمار (٢٠) شخص والمطلوب حساب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي:

العمر (س)	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٣٠
عدد الأشخاص (ك)	٢	٣	٢	٣	٥	٥

الحل: لنتخار وسط فرضي (٢٧) ونكون جدول الحل:

الآن: بتطبيق المعادلة (٤)

يتتج:

$$\bar{م} = ٢٧ + \frac{٩-}{٢٠}$$

$$\bar{م} = ٢٧ - ٠,٤٥ = ٢٦,٥٥$$

س	ر	ك	ح = س - ر	ح × ك
٢٣	٢		٢٣ - ٢ = ٢١	٢١ × ٢ = ٤٢
٢٤	٣		٢٤ - ٣ = ٢١	٢١ × ٣ = ٦٣
٢٥	٢		٢٥ - ٢ = ٢٣	٢٣ × ٢ = ٤٦
٢٦	٣		٢٦ - ٣ = ٢٣	٢٣ × ٣ = ٦٩
٢٧	٥		٢٧ - ٥ = ٢٢	٢٢ × ٥ = ١١٠
٣٠	٥		٣٠ - ٥ = ٢٥	٢٥ × ٥ = ١٢٥
المجموع	٢٠			٩ -

ثالثاً: في حالة الجداول التكرارية:

هنالك ثلاث طرق لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العلة) ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هي: س،...، س_٥ والتكرارات المقابلة هي ت،...، ت_٥ فإن الوسط الحسابي (م) يعرف كالتالي:

مجموع حواصل ضرب مراكز الفئات بالتكرارات المقابلة

$$\bar{m} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_r x_r} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{\sum m_i x_i}$$

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad \diamond$$

خطوات حسابيه:

١- إيجاد مراكز الفئات (س_ر).

٢- ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها.

٣- إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة (٢).

٤- نطبق المعادلة (٥).

وللتوضيح سنورد الأمثلة التالية:

مثال (٨)، أوجد الوسط الحسابي للجدول التالي الذي يبين أجور (٩٠) عامل في أحد المصانع بالدينار الأردني خلال أسبوع معين.

الأجر الأسبوعي	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠	٤٩-٤٥
عدد العمال	٦	٣	١١	١٠	٢٠	٤٠

الحل: بتكوين جدول الحل على النحو التالي:

الآن بتطبيق المعادلة (٥):

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3100}{90} = 40,11$$

الأجرة الأسبوعية	عدد العمال	مركز الفئة	س _ر × ت _ر
الفئات	التكرارات (ت _ر)	(س _ر)	
٢٤-٢٠	٦	٢٢	١٣٢ = ٦ × ٢٢
٢٩-٢٥	٣	٢٧	٨١ = ٣ × ٢٧
٣٤-٣٠	١١	٣٢	٣٥٢ = ١١ × ٣٢
٣٩-٣٥	١٠	٣٧	٣٧٠ = ١٠ × ٣٧
٤٤-٤٠	٢٠	٤٢	٨٤٠ = ٢٠ × ٤٢
٤٩-٤٥	٤٠	٤٧	١٨٨٠ = ٤٠ × ٤٧
المجموع	٩٠		٣١٥٠

مثال (٩): الجدول التالي يبين علامات إحدى الشعب في مساق الإحصاء التربوي:

التردد	فئات العلامات
١٠	٥٠-٣٥
١٥	٦٦-٥١
١٥	٨٢-٦٧
١٠	٩٨-٨٣

احسب الوسط الحسابي للعلامات

الحل: نعمل على تكوين جدول الحل:

الفئات	ت	س	س × ت
٥٠-٣٥	١٠	٤٢,٥	٤٢٥
٦٦-٥١	١٥	٥٨,٥	٨٧٧,٥
٨٢-٦٧	١٥	٧٤,٥	١١١٧,٥
٩٨-٨٣	١٠	٩٠,٥	٩٠٥
المجموع	٥٠		٣٣٢٥

الآن: بتطبيق المعادلة رقم (٥) ينتج:

$$\bar{س} = \frac{٣٣٢٥}{٥٠} = ٦٦,٥$$

الطريقة الثانية: (طريقة الوسط الفرضي): ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هي: س، ...، س، والتكرارات المقابلة هي ت، ...، ت، فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي يعرف كالتالي:

$$\bar{س} = \bar{ف} + \frac{\sum (س - \bar{ف}) \times ت}{\sum ت} \quad (٦)$$

حيث ف: الوسط الفرضي [يفضل أن نختاره مركز الفئة ذات أعلى تكرار]

ح: المحرف مركز الفئة عن الوسط الفرضي أي أن: ح = س - ف

خطوات حسابه:

- ١- نجد مراكز الفئات.
- ٢- نختار الوسط الفرضي (ف).
- ٣- نجد المحراف كل مركز فئة عن الوسط الفرضي (ح).
- ٤- نضرب ح، بالتكرار المقابل (س × ت).
- ٥- نجد مجموع حواصل الضرب في الخطوة (٤).

٦- نطبق المعادلة رقم (٦).

والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (١٠)، إليك الجدول التالي:

الفئات	١٣-٣	٢٤-١٤	٣٥-٢٥	٤٦-٣٦	٥٧-٤٧
التكرار	٦	٧	٦	١٦	١٥

احسب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي

الحل، نعمل على تكوين الجدول الخاص بالحل.

الفئات	التكرارات (ت)	مركز الفئة (س)	ح، س، س-٤١
١٣-٣	٦	٨	٣٣-٤١-٨
٢٤-١٤	٧	١٩	٢٢-٤١-١٩
٣٥-٢٥	٦	٣٠	١١-٤١-٣٠
٤٦-٣٦	١٦	٤١	٤١-٤١- صفر
٥٧-٤٧	١٥	٥٢	١١-٤١-٥٢
المجموع	٥٠		٢٥٣-

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٦):

$$\bar{X} = F + \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = 41 + \frac{253}{50} = 41 + 5.06 = 46.06$$

الطريقة الثالثة، (طريقة الانحرافات المختصرة) ليكن لدينا جدول تكراري مراكز

فئاته س، ... س م والتكرارات المقابلة ت، ... ت م فإن الوسط الحسابي بطريقة

الانحرافات المختصرة يعرف كالتالي:

$$\bar{X} = F + \frac{\sum f \cdot d}{\sum f} \quad (٧)$$

حيث ف : الوسط الفرضي.

ح' : المحراف مركز الفئة عن الوسط مقسوماً على طول الفئة.

ل : طول الفئة.

مثال (١١): إليك الجدول التالي:

الفتات	التكرار
١٥-١٠	٧
٢١-١٦	٨
٢٧-٢٢	١٠
٣٣-٢٨	٥

احسب الوسط الحسابي بطريقة الاحرفات المختصرة.

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفتات	ت	س	ح - س - ٢٤,٥	$\frac{ح - س - ٢٤,٥}{٦}$	ح، التكرار
١٥-١٠	٧	١٢,٥	١٢- = ٢٤,٥ - ١٢,٥	$٢ = \frac{١٢-}{٦}$	١٤- = ٧ × ٢-
٢١-١٦	٨	١٨,٥	٦- = ٢٤,٥ - ١٨,٥	$١ = \frac{٦-}{٦}$	٨- = ٨ × ١-
٢٧-٢٢	١٠	٢٤,٥	٠ = ٢٤,٥ - ٢٤,٥	$٠ = \frac{٠}{٦}$	٠ = ١٠ × ٠
٣٣-٢٨	٥	٣٠,٥	٦ = ٢٤,٥ - ٣٠,٥	$١ = \frac{٦}{٦}$	٥ = ٥ × ١
المجموع	٣٠				١٧-

الآن بتطبيق المعادلة (٧) ينتج:

$$\overline{س} = ف + \sum \frac{ح، التكرار}{\sum ت} \times \frac{١٧-}{٣٠} = ٢٤,٥ - ٣,٤ = ٢١,١$$

$$٢١,١ = ٢٤,٥ - ٣,٤ = \frac{١٧}{٥} - ٢٤,٥ =$$

رابعاً: الوسط الموزون (المرجح):

ليكن لدينا المجموعات أ، ب، ...، م وأوساطها الحسابية $س_١، س_٢، ...، س_م$ وأحجام هذه المجموعات (عدد عناصرها) هي: $ن_١، ن_٢، ...، ن_م$ على الترتيب فإن الوسط الحسابي المرجح (الموزون) الناتج عن الدمج يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{س} = \frac{س_١ ن_١ + س_٢ ن_٢ + ... + س_م ن_م}{ن_١ + ن_٢ + ... + ن_م} \quad (٨)$$

مثال (١٢): تقلعت شعبتان لامتحان في الإحصاء هما أ، ب فإذا كان الوسط الحسابي

لعلامات الشعبة أ يساوي (٦٠) وعدد طلبتها (٣٠) والوسط الحسابي لعلامات الشعبة ب يساوي (٥٠) وعدد طلبتها (٢٠) ما هو الوسط الحسابي (المرجح) للشعبتين معاً.

$$\text{الحل: } \bar{x}_1 = 60, n_1 = 30, \bar{x}_2 = 50, n_2 = 20.$$

$$\text{الوسط الحسابي المرجح} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{60 \times 30 + 50 \times 20}{30 + 20}$$

$$= \frac{2800}{50} = 56$$

مثال (١٣): أخذت ثلاثة عينات من ثلاثة مجتمعات فأعطت النتائج التالية:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 300, \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 2000, \sum_{i=1}^3 x_i^3 = 100000$$

دمجت هذه العينات أوجد الوسط الحسابي الناتج عن الدمج:

الحل: نجد الوسط الحسابي لكل عينة على حدة.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{n_1} = \frac{300}{50} = 6$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2}{n_2} = \frac{2000}{40} = 50$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^3}{n_3} = \frac{100000}{100} = 1000$$

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٨) ينتج:

$$\text{الوسط الحسابي بعد الدمج} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \bar{x}_3 n_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{6 \times 50 + 50 \times 40 + 1000 \times 100}{50 + 40 + 100}$$

$$= \frac{6 \times 50 + 50 \times 40 + 1000 \times 100}{190} = \frac{105000}{190} = 552.63$$

مثال (١٤): الجدول التالي يبين المعدلات الفصلية والساعات المعتمدة لأحد طلبة الهندسة احسب المعدل التراكمي لهذا الطالب.

الفصل الدراسي	المعدل المعتمد	عدد الساعات المعتمدة	الفصل الدراسي	المعدل	عدد الساعات المعتمدة	الفصل الدراسي	المعدل	عدد الساعات المعتمدة
الأول ٩٧/٩٥	٧٦	١٥	الثاني ٩٧	٨٤,٣	١٧	أول ٩٩/٩٨	٩٠	١٨
الثاني ٩٦/٩٦	٨٢	١٨	الصفيفي ٩٧	٩٠	١٢	الثاني ٩٩	٨٢	٢١
صفيفي ٩٦	٨٥	٩	الأول ٩٧/٩٧	٨٨	٢٠	صفيفي ٩٩	٩٢	١٠
الأول ٩٧/٩٦	٨٧,٣	١٨	الثاني ٩٨	٨٩	١٨	الأول ٢٠٠٠/٩٩	٨١	١٧

مجموع حواصل ضرب المعدلات الفصلية بعدد الساعات المعتمدة

$$\frac{\text{معدل الطالب التراكمي} = \overline{س}}{\text{مجموع عدد الساعات المعتمدة}} = \frac{17 \times 84,3 + 15 \times 76 + 18 \times 82 + 9 \times 85 + 18 \times 87,3 + 10 \times 92 + 21 \times 82 + 17 \times 90 + 12 \times 90 + 20 \times 88 + 18 \times 89 + 18 \times 90 + 17 \times 90}{17 + 15 + 18 + 9 + 18 + 10 + 21 + 17 + 12 + 20 + 18 + 17} = \frac{13777 + 920 + 1772 + 162 + 1602 + 176 + 108 + 1433 + 1571,4 + 765 + 1476 + 1140}{193} = 85,32$$

٨٥,٣٢ \approx المعدل التراكمي لهذا الطالب.

(٢-٣) الوسيط (The Median)

تعريفه: هي القيمة التي تتوسط مجموعة من البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً لذلك فإن الوسيط يعتبر من مقاييس الموضع.

أولاً: في حالة المشاهدات المفردة:

يعتمد تعريف الوسيط على عدد المفردات وليس قيمتها لذلك هنالك حالتين هما:

الحالة الأولى: إذا كان عدد المفردات فردي.

خطوات حسابه:

- ١- نرتب المشاهدات ترتيب تصاعدي أو تنازلي.
 - ٢- نجد رتبة الوسيط ورتبة الوسيط (و) = $\frac{1+n}{2}$ حيث ن: عدد المشاهدات.
 - ٣- تكون قيمة الوسيط هي تلك القيمة التي تقابل رتبته.
- والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (١): استخرج الوسيط للملاحظات (-١٧، -١٦، ٣١، ٣٠، ٩١، ٦٢).

الحل (١): نرتب الملاحظات ترتيب تصاعدي

القيمة	-١٧	-١٦	٣٠	٣١	٦٢	٩١
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦

$$(٢) \text{ رتبة الوسيط } (و) = \frac{١+٦}{٢} = \frac{١+٦}{٢} = ٣,٥$$

(٣) قيمة الوسيط هي تلك القيمة التي رتبها ٤ (الرتبة الرابعة) وهنا تساوي ٣٠.

الحالة الثانية:

إذا كانت عدد الملاحظات (ن) عدد زوجي.

خطوات حسابه:

١- نرتب الملاحظات ترتيب تصاعدي أو تنازلي.

٢- نستخرج الرتبة للوسيط وهناك رتبتين هما: رتبة الوسيط الأول، $(و) = \frac{ن}{٢}$ ،

رتبة الوسيط الثاني $(و) = ١ + \left(\frac{ن}{٢}\right)$.

٣- نستخرج قيمة و وهي القيمة التي تقابل رتبته، ونستخرج قيمة و وهي القيمة التي تقابل رتبته.

٤- تكون قيمة الوسيط (و) = $\frac{\text{قيمة و} + \text{قيمة و}}{٢}$ (أي الوسط الحسابي للقيمتين).

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٢): استخرج الوسيط للملاحظات: (٣، ١٠٠، ١٥، ٦، ٢، ٢٢).

الحل: ١- نرتب الملاحظات تصاعدياً: ٢، ٣، ٦، ١٥، ٢٢، ١٠٠.

٢- نستخرج الرتبة للوسيط (هناك رتبتين لأن عدد الملاحظات = ن = ٦ زوجي).

رتبة و = $\frac{٦}{٢} = ٣$ ، رتبة و = $\frac{٦}{٢} = ٣ + ١ = ٤$.

٣- نستخرج قيمة و وهنا القيمة التي رتبها ٣ وتساوي ٦.

نستخرج قيمة و وهنا القيمة التي رتبها ٤ وتساوي ١٥.

$$4- \text{قيمة الوسيط (و)} = \text{الوسط الحسابي للقيمتين و، و} = \frac{\text{قيمة و} + \text{قيمة و}}{2}$$

$$10,5 = \frac{21}{2} = \frac{10+11}{2}$$

مثال (٣): استخراج الوسيط في الحالات التالية:

$$(أ) ١٠، ٨، ١٥، ١٧، ١٦، ٢٠، ١٩، ١، ٢٠$$

$$(ب) ٣، ٠، ٢، ١، ٢٧، ٣٥، ٢٧، ٩٠، ٢٠٠$$

الحل: (أ) ١- نرتب المشاهدات تصاعدياً - ١٠، ٨، ١٥، ١٧، ١٦، ٢٠، ١٩، ١، ٢٠

٢- بما أن عدد المشاهدات (ن) = ٨ (عدد زوجي) فإننا نستخرج الرتبة الوسطية:

$$\text{رتبة و} = \frac{8}{2} = 4، \text{ رتبة و} = 1 + \left(\frac{8}{2}\right) = 5$$

٣- نجد قيمة و، و $10 = 10$ ، و $10 = 10$

$$4- \text{الوسيط} = \text{و} = \frac{10+10}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

(ب) ١- بترتيب المشاهدات تصاعدياً - ٣، ٠، ٢، ١، ٢٧، ٣٥، ٢٧، ٩٠، ٢٠٠

٢- بما أن عدد المشاهدات (ن) = ٩ (عدد فردي) نستخرج الرتبة الوسطية:

$$\text{الرتبة الوسطية} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

٣- نجد الوسيط وهي القيمة التي تقابل الرتبة (٥) ونجد هنا يساوي ٢٧.

ملاحظة: نستطيع إيجاد الوسيط بطريقة أخرى وذلك باتباع الخطوات التالية:

١- نرتب المشاهدات تصاعدياً.

٢- نقوم بحذف مشاهدة من اليسار ومشاهدة من اليمين حتى يتبقى لدينا مشاهدة

واحدة (هي الوسيط) في حالة كون عدد المشاهدات فردي ويبقى لدينا مشاهدتين

(في حالة كون عدد المشاهدات زوجي) وفي هذه الحالة نأخذ معدلها لإيجاد الوسيط.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٤): استخراج الوسيط للمشاهدات التالية: ٣، ٣٠، ٦١، ١٧، -٣٥، ٢، ١٩، ٧.

الحل: ١- نرتب المشاهدات تصاعدياً - ٣٥، ٢، ٣، ٧، ١٧، ١٩، ٣٠، ٦١.

٢- نقوم بالخلف على النحو التالي: $\frac{25}{7}, \frac{3}{7}, \frac{7}{7}, \frac{3}{7}, \frac{7}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7}, \frac{30}{7}, \frac{61}{7}$.

٣- يتبقى لدينا مشاهدتين هما: ١٧، ٧ وبالتالي فالوسيط $= \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

ثانياً، في حالة الجداول التكرارية،

هنالك ثلاثة طرق لحساب الوسيط هي:

١- طريقة القانون:

$$\text{الوسيط} = \text{و} + 1 \times \left[\frac{\frac{n}{2} - \frac{n-1}{2}}{t} \right] \times \text{.....} \quad (٩)$$

حيث: أ = الحد الأدنى الفعلي للفترة الوسيطة.

الفترة الوسيطة: هي تلك الفئة التي تكرارها التراكمي يزيد عن رتبة الوسيط.

$$\frac{n}{2} = \text{رتبة الوسيط حيث } n = \text{مجموع التكرارات} = \sum t_i$$

n_i = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة الوسيطة.

t_i = تكرار الفئة الوسيطة = التكرار التراكمي اللاحق للفئة الوسيطة - التكرار

التراكمي السابق للفئة الوسيطة.

ل = طول الفئة الوسيطة = الحد الأعلى الفعلي للفترة الوسيطة - الحد الأدنى

الفعلي للفئة الوسيطة.

خطوات حسابه:

$$1- \text{نحدد رتبة الوسيط حيث رتبة الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

٢- تكوين الجدول التراكمي (حدود فعلية + تكرار تراكمي).

٣- نحدد الفئة الوسيطة ومنها نحدد قيمة أ.

٤- نحدد التكرار التراكمي السابق واللاحق.

٥- نطبق القانون الوارد في المعادلة (٩).

مثال (٥): أوجد الوسيط للجدول التالي:

الفئات	٢٩-٢٠	٣٩-٣٠	٤٩-٤٠	٥٩-٥٠	٦٩-٦٠	المجموع
التكرار	٣	١٤	١٦	١٧	١٠	٦٠

الحل،

$$١- \text{نجد رتبة الوسيط حيث رتبة الوسيط} = \frac{\sum f}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

٢- بتكوين الجدول التراكمي.

الحدود الفعلية	التكرار التراكمي
٢٩٥-١٩٥	٣
٣٩٥-٢٩٥	١٧
٤٩٥-٣٩٥	٣٣
٥٩٥-٤٩٥	٥٠
٦٩٥-٥٩٥	٦٠

الفئة الوسيطة →

التكرار التراكمي السابق

رتبة الوسيط = ٣٠

التكرار التراكمي اللاحق

وبالتالي فإن:

$$١ = \text{الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطة} = ٣٩٥.$$

$$\frac{n}{2} = \text{رتبة الوسيط} = ٣٠$$

$$١ = \text{التكرار التراكمي السابق لرتبة الوسيط} = ١٧.$$

$$٣ = \text{تكرار الفئة الوسيطة} = ٣٣ - ١٧ = ١٦.$$

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٩) ينتج:

$$\text{الوسيط} = و = ١ + \left[\frac{\frac{n}{2} - ١}{٣} \right] \times \left[\frac{٣٣ - ١٧}{١٦} \right] + ٣٩٥ = ١٠ \times \left[\frac{١٧ - ٣٠}{١٦} \right] + ٣٩٥ =$$

$$= \frac{١٣٠}{١٦} + ٣٩٥ = ١٠ \times \left[\frac{١٣}{١٦} \right] + ٣٩٥ =$$

$$= ٤٧,٦٢٥ = ٨١٢٥ + ٣٩٥ =$$

طريقة النسبة والتناسب: وللتوضيح هذه الطريقة سنورد المثال التالي:

وبالبحث عن رتبة الوسيط ضمن التكرار التراكمي الصاعد فنجدها وبالتالى فإن الوسيط يساوي الحد الفعلي المقابل للرتبة وعندئذ الوسيط = ٢٥,٥ .

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٩,٥	صفر
١٧,٥	٣
٢٥,٥	١٠
٣٣,٥	١٨
٤١,٥	٢٠

الطريقة الهندسية نقوم برسم المنحنى التراكمي الصاعد (أو الهابط) ونحدد رتبة الوسيط على المحور الرأسى (محور التكرار التراكمي) ومن هذه النقطة (رتبة الوسيط) نمد خط أفقى حتى يتقاطع مع المنحنى التراكمي ومن نقطة التقاطع ننزل عمود حتى يتقاطع مع المحور الأفقى (محور الحدود الفعلية) فتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقى هي قيمة الوسيط. والمثل التالى يوضح ذلك.

مثال (٨): أوجد الوسيط بيانياً للجدول التالى:

الفئات	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	المجموع
التكرار	٣	٧	١٤	٦	١٠	٤٠

الحل:

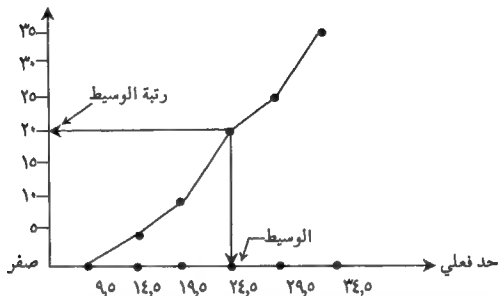
$$١- \text{نحدد رتبة الوسيط} = \frac{\sum T}{٢} = \frac{٤٠}{٢}$$

٢- نكون الجدول التراكمي الصاعد

٣- رسم المنحنى التراكمي الصاعد

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٩,٥	صفر
١٤,٥	٣
١٩,٥	١٠
٢٤,٥	٢٤
٢٩,٥	٣٠
٣٤,٥	٤٠

تكرار تراكمي



ملاحظة: يلاحظ بأن المنحنى التراكمي الصاعد والمابط يتقاطعان في نقطة الإحداثي الأفقي لها الوسيط والإحداثي الرأسى لها رتبة الوسيط.

(٣-٢-٣) في حالة البيانات المتكررة،

لايجاد الوسيط في هذه الحالة سنورد المثال التالي:

مثال (٩): أوجد الوسيط لأعمار (٣٠) شخص كما هي واردة في الجدول.

العمر (س)	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
التكرارات	٣	٢	٥	١٠	٧	٣

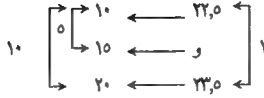
$$\text{الحل: ١- نجد رتبة الوسيط} = \frac{\sum T}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

٢- نكون الجدول التراكمي الصاعد

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
١٩,٥	صفر
٢٠,٥	٣
٢١,٥	٥
٢٢,٥	١٥
٢٣,٥	٢٠
٢٤,٥	٢٧
٢٥,٥	٣٠

رتبة الوسيط = ١٥

الآن: بطريقة النسبة والتناسب:



$$23 = 0.5 + 22.5 = 1 \times \frac{0.5}{1} + 22.5 = 23$$

(٣-٣) المنوال (The Mode):

تعريفه: هي القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) بين المشاهدات.
كيفية استخراجها:

أولاً، في حالة المشاهدات المفردة،

هي القيمة الأكثر تكراراً بين المشاهدات.

ولتوضيح كيفية استخراجها نورد الأمثلة التالية:

مثال (١)، أوجد المنوال في الحالات التالية:

١- ٤، ٣، ٤، ٥، ٦، ١١، ٤، ٧، ٤

٢- ١٢، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٦، ١٠، ١٢

٣- ٧، ٦، ٦، ٥، ٤، ٤، ٧

٤- ١١، ١١، ٦، ٦، ٣، ٣، ٤، ٤، ١١

٥- ٢٢، ٢٠، ١٥، ١٦، ١٤، ١٥، ١٤، ٢٢

٦- ٢٣، ١٧، ١٧، ٢٣، ٢١، ١٧، ٢٣، ٢١، ٢١، ٢٣

٧- ١١، ١١، ١٠، ١٠، ٩، ٩، ٣، ١٠، ١١

الحل: ١- المنوال = ٤ (لأن المشاهدات ٤ تكررت أكثر من غيرها).

٢- لا يوجد منوال (عديم المنوال) لأن ليس هنالك قيمة تكررت أكثر من غيرها.

٣- هنالك منوالان هما ٤، ٦ (لأن تكرار القيمة ٤ = تكرار القيمة ٦ = ٢).

٤- عديم المنوال (لنفس السبب المذكور في (٢)).

٥- المنوال = $\frac{15+14}{2} = 14.5$ لأن القيمتين ١٤، ١٥ لهما نفس التكرار ولم يفصل

بينهما فاصل، وبالتالي فللنوال هو وسطهما الحسابي.

٦- عديم النوال لأن ليس هنالك قيمة تكررت أكثر من غيرها.

٧- هنالك ثلاثة منوالات هي: ١، ٩، ١١ لأن تكرارها متساوي.

ثانياً: في حالة الجداول التكرارية:

ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هي: س، ...، س م والتكرارات المقابلة هي ت، تم، ...، ت م. سنجد النوال بثلاثة طرق هي:

١- طريقة الفروق لبرسون:

$$\text{النوال} = 1 + \left[\frac{f_1}{f_1 + f_2} \right] \times d \quad \dots\dots\dots (١٠)$$

حيث: أ = الحد الأدنى للفئة المتوالية.

الفئة المتوالية: هي تلك الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

ف_١ = تكرار الفئة المتوالية - تكرار الفئة التي تسبق الفئة المتوالية.

ف_٢ = تكرار الفئة المتوالية - تكرار الفئة التي تلحق الفئة المتوالية.

ل = طول الفئة المتوالية.

= الحد الأعلى الفعلي للفئة المتوالية - الحد الأدنى الفعلي للفئة المتوالية.

مثال (٢)، إليك الجدول التالي:

٤٩-٤٥	٤٤-٤٠	٣٩-٣٥	٣٤-٣٠	الفئات
٩	١٠	٧	٦	التكرار

استخدم طريقة الفروق لبرسون لإيجاد النوال.

الحل: ١- الفئة المتوالية (٤٤-٤٠).

٢- أ = الحد الأدنى للفئة المتوالية = ٤٠.

٣- ف_١ = تكرار الفئة المتوالية - تكرار الفئة التي تسبق الفئة المتوالية = ١٠ - ٧ = ٣

ف_٢ = تكرار الفئة المتوالية - تكرار الفئة التي تلحق الفئة المتوالية = ١٠ - ٩ = ١

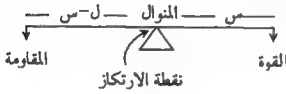
٤- ل = طول الفئة المتوالية = الحد الأعلى الفعلي للفئة المتوالية - الحد الأدنى الفعلي لها.

$$= ٤٤,٥ - ٣٩,٥ = ٥$$

٥- بتطبيق القانون الوارد في المعادلة (١٠) ينتج:

$$\begin{aligned} \text{النوال} = 1 + \left[\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right] \times J + \varepsilon_0 &= 0 \times \left[\frac{3}{3+1} \right] + \varepsilon_0 = 0 \times \left[\frac{3}{4} \right] + \varepsilon_0 \\ 83,70 &= 3,70 + \varepsilon_0 \end{aligned}$$

٢- **طريقة الرافعة:** تعتمد هذه الطريقة على مبدأ فيزيائي، ومن موضوع الرافعة والقوة والمقاومة حيث يشبه النوال نقطة الارتكاز، وأحد حلي الفئة المتوالية نهاية الرافعة من جهة القوة والآخر نهايتها من جهة المقاومة وبذلك يكون طول الفئة ممثلاً لطول الرافعة وبذلك يمكن تمثيل تكرار الفئة قبل المتوالية بالقوة وتكرار الفئة بعد المتوالية بالمقاومة [لاحظ الشكل المجاور].



وحتى تتزن الرافعة يجب أن يكون:

العزوم الموجية = العزوم السالبة

القوة \times ذراعها = المقاومة \times ذراعها.

لنفترض بأن تكرار الفئة قبل المتوالية = T_1 = القوة

تكرار الفئة بعد المتوالية = T_2 = المقاومة

وعندئذ فإن: $T_1 \times S = T_2 \times (L - S)$

ومنها: $T_1 \times S = T_2 \times L - T_2 \times S$

$\Leftrightarrow (T_1 + T_2) \times S = T_2 \times L$

$\Leftrightarrow S = \left(\frac{T_2}{T_1 + T_2} \right) \times L$

وبالتالي: النوال = الحد الأدنى للفئة المتوالية + $\left(\frac{T_2}{T_1 + T_2} \right) \times L$ (١١)

مثال (٣)، للجدول التالي:

الفئات	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠	٤٩-٤٥
التكرار	٦	٧	١٠	٩

احسب المنوال بطريقة الرافعة.

الحل: ١- الفئة المتوسطة هي (٤٠-٤٤).

٢- الحد الأدنى للفئة المتوسطة = ٤٠.

٣- T_1 = تكرار الفئة قبل المتوسطة = ٧

T_2 = تكرار الفئة بعد المتوسطة = ٩

ل = طول الفئة المتوسطة = الحد الأعلى الفعلي لها - الحد الأدنى الفعلي لها.

$$= 44.5 - 39.5 = 5$$

٤- بتطبيق الصيغة الواردة في المعادلة رقم (١١) ينتج:

$$\text{المنوال} = 40 + 5 \times \left[\frac{9}{9+7} \right] + 5 \times \left(\frac{9}{16} \right) = 42.81$$

$$42.81 = 40 + \frac{40}{16} = 42.81$$

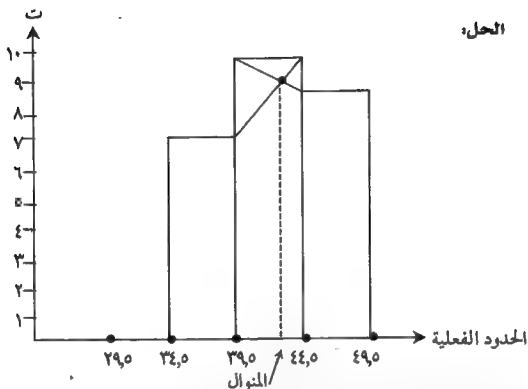
ملاحظة: يختلف المنوال باختلاف طريقة حسابه كما هو ملاحظ بالمقارنة بين الإجابتين في المثال (٢) و (٣).

٣- طريقة الرسم البياني: يتم استخراج المنوال بيانياً بواسطة استخدام المستطيلات التي تمثل تكرار الفئة قبل المتوسطة وتكرار الفئة بعد المتوسطة حيث نصل الزاوية اليمنى العليا للمستطيل الذي يمثل الفئة المتوسطة بالزاوية التي تماثلها في مستطيل الفئة قبل المتوسطة ونصل الزاوية اليسرى العليا للمستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المتوسطة بالزاوية التي تماثلها في المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المتوسطة من نقطة داخل المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المتوسطة، نزل من نقطة التقاطع عموداً على المحور الأفقي حيث يقطعه في نقطة هي المنوال. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٤)، استخراج المنوال بيانياً للجدول التالي:

الفئات	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٩-٤٥	٤٩-٤٥
التكرار	٦	٧	١٠	٩

الحل:



ملاحظة: إذا كان الجدول التكراري غير منتظم يجب عندها تعديل التكرارات لحساب المنوال بيانياً حيث التكرار المعدل يعطى بالعلاقة:

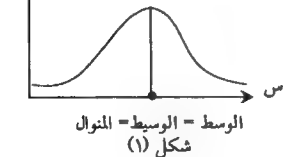
$$\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} = \text{التكرار المعدل}$$

تعريف: المنوال التقريبي: هو مركز الفئة الأكثر تكراراً.

$$\text{وفي مثل (٤) يكون المنوال التقريبي} = \frac{40}{16} + 40 = 42,5$$

(٣-٤) العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال:

١- في التوزيعات المتماثلة (أحادية المنوال) وجد أن الوسط = الوسيط = المنوال
لاحظ الشكل المجاور (شكل ١).



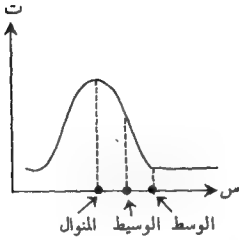
٢- في التوزيعات التكرارية الملتوية
التواءاً بسيطاً (أحادية المنوال) جد أن
هنالك علاقة بين الوسط والوسيط
والمنوال. وأن الوسيط يقع بين

الوسط والمنوال والعلاقة هي:

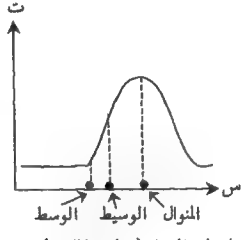
الوسط الحسابي - المنوال = ٣ (الوسط الحسابي - الوسيط)

$$\bar{م} - م = ٣ (م - و) \dots\dots\dots (١٢)$$

لاحظ الشكلين (٢) & (٣).



ملتوي نحو اليمين (موجب الالتواء)



ملتوي نحو اليسار (سالب الالتواء)

مثال (١): في توزيع أحادي المنوال (ملتوي التواءاً بسيطاً) وجد أن $\bar{م} = ٥٠$ ، و $م = ٥٥$ أوجد المنوال (م).

الحل: باستخدام العلاقة (١٢)

$$\begin{aligned} \bar{م} - م &= ٣ (م - و) \\ ٥٠ - ٥٥ &= ٣ (٥٥ - و) \\ ٥ - ٥٥ &= ٣ (٥٥ - و) \\ ٥ - ٥٥ &= ١٥٠ - ٣ و \\ ٣ و &= ١٥٠ - ٥ \\ و &= ٦٥ \end{aligned}$$

مثال (٢): في توزيع أحادي المنوال وجد أن $م = ٧٠$ ، و ٦٥ أوجد الوسط الحسابي.

الحل: باستخدام العلاقة الواردة في (١٢).

$$\begin{aligned} \bar{م} - م &= ٣ (م - و) \\ ٦٥ - ٧٠ &= ٣ (٧٠ - و) \\ ٥ - ٧٠ &= ٢١٠ - ٣ و \\ ٣ و &= ٢١٠ - ٥ \\ و &= ٦٩,٥ \end{aligned}$$

(٣-٥) خصائص مقاييس النزعة المركزية ومقارنة بين صفات الوسط والوسيط والمنوال:

١- الوسط الحسابي هو متوسط لقيم المجموعة وليس لمنازل المجموعة كما هو الحال في الوسيط والمنوال.

٢- يتأثر الوسط الحسابي بجميع قيم المجموعة وليس كالوسيط والمنوال.

٣- يتأثر الوسط الحسابي بالقيم المتطرفة لذلك يصبح مضللاً في بعض الحالات لذلك لا يفضل استخدامه والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (١): استخرج الوسط الحسابي للقيم التالية: ٢، ٨، ١٠، ٢٠٠٠.

$$\text{الحل: } \bar{x} = \frac{2000 + 10 + 8 + 2}{4} = \frac{2020}{4} = 505$$

فلاحظ هنا أن الوسط الحسابي المجذب نحو القيمة المتطرفة ولم يعبر عن القيم الأخرى.

٤- سهولة فهمه وحسابه.

٥- سهولة إجراء العمليات الحسابية عليه وبالتالي استطعنا إيجاد الوسط الحسابي الناتج عن دمج المجموعات.

٦- يمكن إيجاد مجموع القيم إذا عرف الوسط الحسابي وعدد القيم.

مثال (٢): أوجد مجموع القيم لمجموعة وسطها الحسابي (٣٠) وعدد مفرداتها (٢٠).

الحل: مجموع القيم = $\bar{x} \times n$ = الوسط الحسابي \times عدد القيم.

$$= 30 \times 20 = 600$$

٧- يمكن إيجاد عدد القيم إذا عرف الوسط الحسابي ومجموع القيم حسب الصيغة التالية:

$$\text{عدد القيم} = n = \frac{\text{مجموع القيم}}{\bar{x}} = \frac{\bar{x} \times n}{\bar{x}}$$

مثال (٣): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في الإحصاء = ٦٥، مجموع

العلامات = ٣٢٥٠ أوجد عدد طلبة هذه الشعبة.

الحل:

$$n = \frac{\text{مجموع العلامات}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{3250}{65} = 50$$

٨- مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي الصفر.

أي أن : $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ صفر : $\sum (x_i - \bar{x}) \times n = 0$ صفر.

مثال (٤): للقيم التالية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، أوجد مجموع انحرافات هذه القيم عن وسطها الحسابي.

الحل:

$$n = 5, \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum (x_i - 3)$$

$$= (1-3) + (2-3) + (3-3) + (4-3) + (5-3) =$$

$$= -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0 \text{ صفر}$$

مثال (٥): إذا كان انحرافات خمسة قيم عن وسطها الحسابي هي: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، أوجد قيمة \bar{x} .

الحل: بما أن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ فإن } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 9\bar{x} = 0$$

$$45 - 9\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 5$$

مثال (٦): إذا كان $\sum_{i=1}^n x_i = 200$ أوجد $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$

الحل:

$$n = 20, \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{200}{20} = 10$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - 10) = 0$$

٩- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال (٧): للقيم التالية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، أوجد مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي ثم مجموع مربعات الانحرافات عن القيمة (٤) ثم قارن بين النتيجة.

الحل: نجد أولاً $\bar{x} = \frac{10}{5} = 2$

$$\text{مجموع مربعات المحرفات القيم عن الوسط الحسابي} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = (3-2)^2 + (3-1)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2 + (3-5)^2 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$$

$$\text{مجموع مربعات المحرفات القيم عن القيمة (4)} = \sum (x_i - 4)^2 = (2-4)^2 + (1-4)^2 + (3-4)^2 + 4 + 9 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (2-4)^2 = 15$$

وبالمقارنة نلاحظ أن: $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 10 < \sum (x_i - 4)^2 = 15$ وهذا يثبت الخاصية

١٠- الوسط الحسابي هو نقطة اتزان للمدرج التكراري، وبما أن الوسط الحسابي هو نقطة اتزان للتوزيع، فإنه إذا أضفنا عدد من القيم التي قيمتها مساوية للوسط الحسابي إلى البيانات فإن هذه الإضافة لا تؤثر ولكن إذا أضفنا مفردات تختلف قيمتها عن قيمة الوسط الحسابي فإن قيمته تتغير.

١١- لا يمكن حساب الوسط الحسابي في حالة الجداول المفتوحة، لذا نلجأ في حالة الجداول المفتوحة إلى حساب الوسيط والمنوال.

١٢- الوسيط سهل التعريف وسهل الحساب ولا يتأثر بالقيم الشاذة.

١٣- يعتبر الوسيط مقياس موضع فإنه لا يعتمد على جميع القيم دائماً فتغير بعض القيم قد تؤثر عليه وقد لا تؤثر عليه.

١٤- يستعمل الوسيط خاصة في البيانات التي يعرف ترتيبها ولا تعرف قيمها وكذلك في البيانات الناقصة، لذلك يمكن استخراجها في الجداول المفتوحة.

١٥- إذا أخذت عينة من مجتمع ما وأخذت عينة أخرى من نفس المجتمع فإننا نجد تقارباً بين الوسطين الحسابيين لهاتين العينتين أكثر من التقارب بين وسطيهما لذلك فإن الوسط الحسابي أكثر ثباتاً من الوسيط.

١٦- المنوال لا يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة) لذلك يمكن حسابه من الجداول المفتوحة.

١٧- يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استخدامه لإيجاد متوسط للظواهر التي لا يمكن قياسها رقمياً (كمياً) مثل الصفات فهو الصفة الأكثر شيوعاً.

١٨- يفضل استخدام الوسط الحسابي إذا كان التوزيع متماثلاً واهتملنا منصب على القيمة العددية لجميع القيم (البيانات) بدلاً من قيمة نموذجية.

١٩- يفضل استخدام الوسيط إذا أردنا إيجاد قيمة نموزجية (مثلة) وإذا كان التوزيع ملتوياً.

٢٠- أثر التحويلات الخطية: إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات (المفردة أو المبوبة)

وسطها الحسابي (\bar{x}) والوسيط لها ($و.س$) والمنوال ($م.س$).

وعدلت هذه المشاهدات طبقاً للمعادلة:

$$ص = أ.س + ب \quad \text{حيث } أ، ب \text{ إعداد حقيقية.}$$

ص: المشاهدة بعد التعديل، س: المشاهدة قبل التعديل.

فإن جميع المقاييس (الوسط والوسيط والمنوال) تتأثر بهذا التعديل وبذلك يكون:

الوسط الحسابي بعد التعديل = $أ \times \text{الوسط الحسابي قبل التعديل} + ب$

$$\bar{ص} = \bar{أ.س} + ب$$

الوسيط بعد التعديل = $أ \times \text{الوسيط قبل التعديل} + ب$

$$و.ص = أ.و.س + ب$$

المنوال بعد التعديل = $أ \times \text{المنوال قبل التعديل} + ب$

$$م.ص = أ.م.س + ب$$

وهذا يعني بأن هذه المقاييس تتأثر بالعمليات الحسابية الأربعة.

مثال (٨): إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لعلامات شعبة ما في مادة

الفيزياء هي على الترتيب ٩٠، ٧٢، ٦٦ وأجرينا التعديل التالي:

$$ص = \frac{1}{3}س + ٣٥$$

حيث س: العلامة قبل التعديل، ص: العلامة بعد التعديل.

أوجد الوسط والوسيط والمنوال بعد التعديل.

الحل: بما أن $\bar{ص} = ٩٠$ ، $و.ص = ٧٢$ ، $م.ص = ٦٦$ فإن:

$$\bar{ص} = \frac{1}{3}\bar{س} + ٣٥ = ٩٠ \Rightarrow \frac{1}{3}\bar{س} = ٩٠ - ٣٥ = ٥٥ \Rightarrow \bar{س} = ١٦٥$$

$$و.ص = \frac{1}{3}و.س + ٣٥ = ٧٢ \Rightarrow \frac{1}{3}و.س = ٧٢ - ٣٥ = ٣٧ \Rightarrow و.س = ١١١$$

$$م.ص = \frac{1}{3}م.س + ٣٥ = ٦٦ \Rightarrow \frac{1}{3}م.س = ٦٦ - ٣٥ = ٣١ \Rightarrow م.س = ٩٣$$

مثال (٩)، إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في الإحصاء (٦٠) وعند طلاب الشعبة (٣٠) راجع المدرس ثلاثة طلاب فزادت علامة الأول (٥) علامات وزادت علامة الثاني (٦) علامات بينما نقصت علامة الثالث (٤) علامات أوجد الوسط الحسابي بعد عملية المراجعة.

الحل: سنجد الحل بطريقتين.

الطريقة الأولى: مجموع العلامات قبل المراجعة = الوسط الحسابي × عدد الطلبة

$$١٨٠٠ = ٣٠ \times ٦٠ =$$

مجموع العلامات بعد المراجعة = مجموع العلامات قبل المراجعة + مقدار الزيادة والنقصان

$$١٨٠٧ = ٤ - ٦ + ٥ + ١٨٠٠ =$$

$$\text{وبالتالي الوسط الحسابي بعد المراجعة} = \frac{\text{مجموع العلامات بعد المراجعة}}{\text{عدد الطلبة}} = \frac{١٨٠٧}{٣٠} = ٦٠,٢٣.$$

الطريقة الثانية:

مقدار الزيادة أو النقصان

الوسط الحسابي بعد المراجعة = الوسط الحسابي قبل المراجعة + $\frac{\text{مقدار الزيادة أو النقصان}}{\text{عدد طلاب الشعبة}}$

$$\text{الوسط الحسابي بعد المراجعة} = ٦٠ + \frac{٤ - ٦ + ٥}{٣٠}$$

$$٦٠,٢٣ = ٠,٢٣ + ٦٠ = \frac{٧}{٣٠} + ٦٠ =$$

مثال (١٠)، إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لعلامات شعبة ما في مادة الإحصاء هي على الترتيب ٦٠، ٤٥، ٣٠ وأجرى المدرس التعديل التالي:

ص = ٩٠ - $\frac{١}{٥}$ م أوجد المقاييس الثلاثة بعد التعديل

الحل: بما أن ص = ٦٠، و = ٤٥، م = ٣٠ فإن:

$$\text{ص} = ٩٠ - \frac{١}{٥} = ٩٠ - (٦٠) \frac{١}{٥} = ١٢ - ٩٠ = ٧٨$$

$$\text{و} = ٩٠ - \frac{١}{٥} = ٩٠ - (٤٥) \frac{١}{٥} = ٩ - ٩٠ = ٨١$$

$$\text{م} = ٩٠ - \frac{١}{٥} = ٩٠ - (٣٠) \frac{١}{٥} = ٦ - ٩٠ = ٨٤$$

(٦-٣) المئينات والربيعات والعشيرات: (Percentiles, Quartiles & Deciles)
المئينات: (١-٦-٣)

لاحظنا من تعريف الوسيط بأنه هو النقطة على المحور الأفقي التي تقسم المساحة تحت المضلع التكراري إلى قسمين متساويين. أما المقياس الذي يقسم المساحة إلى مئة جزء متساوي فهو المئين، وبالتالي يمكن تعريف المئين رقم ك (م ر) بأنه تلك القيمة على المحور الأفقي التي يسبقها أو يساويها ك% من البيانات ويليهها (١٠٠-ك)% من البيانات. فمثلاً، نعي بالمئين الخامس هو تلك القيمة التي يسبقها ٥% من البيانات ويليهها ٩٥% من البيانات وهكذا.

كيفية حسابه:

أولاً: في حالة المشاهدات المفردة:
خطوات حسابه:

- ١- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.
- ٢- نستخرج رتبة المئين رقم ك حيث أن رتبة المئين رقم ك = رتبة $m = \frac{k}{100} \times (n+1)$. حيث ن: عدد المشاهدات.

- ٣- تكون قيمة المئين رقم ك هي تلك القيمة التي تقابل الرتبة. مثال (١)، للبيانات التالية: ١١، ١٧، ١٥، ١٤، ٢٠، ٢٤، ٢٩، ٩، أوجد:
 - ١- المئين العاشر (م). ٢- المئين الخمسون (م).
 - ٣- المئين التسعون (م). ٤- المئين الستون (م).

الحل: نرتب المشاهدات تصاعدياً كما في الجدول التالي :

القيمة	٩	١١	١٤	١٥	١٦	١٧	٢٠	٢٤	٢٩
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

عدد المشاهدات = ن = ٩.

- ١- رتبة م، $\frac{10}{100} = (1+9) \times \frac{10}{100} = 10$ تكون قيمة م هي المشاهدة التي ترتيبها الأول الرتبة الأولى. وهنا تساوي ٩ وبالتالي م = ٩.
- ٢- رتبة م، $\frac{50}{100} = (1+9) \times \frac{50}{100} = 50$

قيمة م. = المشاهدة التي رتبها الخامس = ١٦.

$$٣ - \text{رتبة م.} = (١+٩) \times \frac{٩٠}{١٠} = ١٠ \times \frac{٩٠}{١٠} = ٩$$

قيمة م. = المشاهدة التي رتبها التاسعة = ٢٩.

$$٤ - \text{رتبة م.} = (١+٩) \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ١٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ٦$$

قيمة م. = المشاهدة التي رتبها السادسة = ١٧.

مثال (٢): للبيانات التالية: ٦-، ١٩-، ٢٠، ٢٤، ٢٥، ١٩ استخراج م، م وفسر معناهما.

الحل: نرتب المشاهدات تصاعدياً كما في الجدول التالي:

القيمة	١٩-	٦-	١٩	٢٠	٢٤	٢٥
الترتيب	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس

عدد المشاهدات = ن = ٦

$$١ - \text{رتبة م} = (١+٦) \times \frac{٥}{١٠٠} = (١+٦) \times \frac{٥}{١٠٠} = ٧ \times \frac{٥}{١٠٠} = \frac{٣٥}{١٠٠}$$

تفسيره: المئين الخامس يقع قبل المشاهدة الأولى.

$$٢ - \text{رتبة م} = (١+٦) \times \frac{٢٥}{١٠٠} = ٧ \times \frac{٢٥}{١٠٠} = \frac{١٧٥}{١٠٠}$$

تفسيره: المئين الخامس والعشرون يقع بين المشاهدين الأولى والثانية لكنه أقرب للثانية.

ثانياً: في حالة الجداول التكرارية (الفئات)، هنالك ثلاثة طرق لحسابه هي:

(١) طريقة القانون:

خطوات حسابه:

١- تكوين الجداول التراكمي (حدود فعلية + تكرار تراكمي).

٢- تحديد رتبة المئين حيث رتبة المئين رقم ك يعطى بالعلاقة.

$$\text{رتبة م} = \frac{\text{ك}}{١٠٠} \times \text{مجموع التكرارات} = \frac{\text{ك}}{١٠٠} \times \sum$$

٣- تحديد الفئة المئينية. والفئة المئينية هي تلك الفئة التي تكرارها التراكمي يزيد عن رتبة المئين.

٤- نطبق القانون التالي:

$$\text{المئين رقم ك} = \frac{\text{رتبة م} - \text{رتبة م} - \text{ن}}{\text{ت}} \times \text{ن} \quad (١٣)$$

حيث أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة المئينية

ن = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة المئينية.

ت = تكرار الفئة المئينية.

ل = طول الفئة المئينية = الحد الأعلى الفعلي لها - الحد الأدنى الفعلي لها.

مثال (٣): إليك الجدول التالي:

الفئات	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	٤٤-٤٠	٤٩-٤٥	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٢	٣	٣٠

أوجد ما يلي: (١) م_{١٠} (٢) م_{١٥} (٣) م_{٢٥} (٤) م_{٣٠}

الحل: بتكوين الجدول التراكمي.

الفئات	ت	الحدود الفعلية	التكرار التراكمي
٢٩-٢٥	صفر	٢٩,٥-٢٤,٥	صفر
٣٤-٣٠	٥	٣٤,٥-٢٩,٥	٥
٣٩-٣٥	١٠	٣٩,٥-٣٤,٥	١٥
٤٤-٤٠	١٢	٤٤,٥-٣٩,٥	٢٧
٤٩-٤٥	٣	٤٩,٥-٤٤,٥	٣٠
المجموع	٣٠		

$$١- \text{رتبة م} = \frac{١}{١٠٠} \times ٣٠ = ٠,٣$$

الفئة المئينية: (٣٤,٥-٢٩,٥) = أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة المئينية = ٢٩,٥.

ن، = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة المتينة = صفر.

ت_م = تكرار الفئة المتينة = ٥

ل = طول الفئة المتينة = الحد الأعلى الفعلي - الحد الأدنى الفعلي =

$$= ٢٩,٥ - ٣٤,٥$$

الآن بتطبيق الصيغة الواردة في المعادلة (١٣).

$$٥ \times \left[\frac{-٠,٣}{٥} \right] + ٢٩,٥ = ل \times \left[\frac{\text{رتبة المئين} - \text{ن}}{\text{ت}_\text{م}} \right] + \text{أ} = ١, \text{م}$$

$$٢٩,٨ = ٠,٣ + ٢٩,٥ =$$

$$٢ - \text{رتبة م} = ٣٠ \times \frac{١٥}{١٠٠} = ٤,٥$$

الفئة المتينة (٣٤,٥ - ٢٩,٥) $\Leftarrow \text{أ} = ٢٩,٥$

ن = ١ - صفر، ت_م = ٥، ل = ٥

$$٥ \times \left[\frac{-٤,٥}{٥} \right] + ٢٩,٥ = ل \times \left[\frac{\text{رتبة م} - \text{ن}}{\text{ت}_\text{م}} \right] + \text{أ} = ١٠, \text{م}$$

$$= ٢٩,٥ - ٤,٥ = ٣٤$$

$$٣ - \text{رتبة م} = ٣٠ \times \frac{٧٥}{١٠٠} = ٢٢,٥$$

الفئة المتينة (٤٤,٥ - ٣٩,٥) $\Leftarrow \text{أ} = ٣٩,٥$

ن = ١٥، ت_م = ١٢، ل = ٥

$$٥ \times \left[\frac{١٥ - ٢٢,٥}{١٢} \right] + ٣٩,٥ = ل \times \left[\frac{\text{رتبة م} - \text{ن}}{\text{ت}_\text{م}} \right] + \text{أ} = ١٠, \text{م}$$

$$٤٢,٦٢٥ = ٣,١٢٥ + ٣٩,٥ = \left(\frac{٢٧,٥}{١٢} \right) + ٣٩,٥ = ٥ \times \left(\frac{٧,٥}{١٢} \right) + ٣٩,٥$$

$$١٨ = ٣٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ٤ - \text{رتبة م}$$

الفئة المتينة (٤٤,٥ - ٣٩,٥) $\Leftarrow \text{أ} = ٣٩,٥$

$$ن = ١٥ ، ت = ١٢ ، ل = ٥$$

$$٥ \times \left(\frac{٣}{١٢} \right) + ٣٩,٥ = ٥ \times \left[\frac{١٥ - ١٨}{١٢} \right] + ٣٩,٥ = ٣,٢$$

$$٤٠,٧٥ = ١,٢٥ + ٣٩,٥ =$$

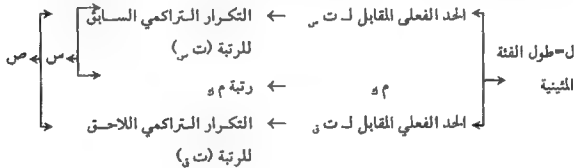
الطريقة الثانية: (النسبة والتناسب):

خطوات الحل:

١- تكوين الجدول التراكمي الصاعد (حد فعلي + تكرار تراكمي صاعد).

٢- تحديد رتبة المئين.

٣- نبحث عن رتبة المئين ضمن التكرار التراكمي فإذا وجدناها يكون المئين هو الحد الفعلي المقابل لها وإذا لم نجدها نحجري النسبة والتناسب على النحو التالي:



$$\text{حيث } س = \text{رتبة م} - ت س ; ص = ت س - ت س$$

$$\text{وعندئذ } م = \text{الحد الفعلي المقابل لـ ت} + \left(\frac{س}{ص} \right) \times \dots (١٤)$$

مثال (٤): إليك الجدول التالي:

الفئات	١٩-١٠	٢٩-٢٠	٣٩-٣٠	٤٩-٤٠	٥٩-٥٠	الجموع
التكرار	٣	٢	٥	٧	٨	٢٥

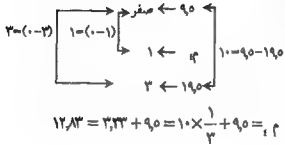
أوجد (١) م (٢) م (٣) م (٤) م (٥) م

الحل: بتكوين الجدول التراكمي الصاعد

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٩-٠	صفر	٩٥	صفر
١٩-١٠	٣	١٩٥	٣
٢٩-٢٠	٢	٢٩٥	٥
٣٩-٣٠	٥	٣٩٥	١٠
٤٩-٤٠	٧	٤٩٥	١٧
٥٩-٥٠	٨	٥٩٥	٢٥
المجموع	٢٥		

$$(١) \text{ رتبة م} = ٢٥ \times \frac{٤}{١٠٠} = ١$$

رتبة م



$$١٢,٨٣ = ٣,٣٣ + ٩٥ = ١٠ \times \frac{١}{٣} + ٩٥ = ١, م$$

$$٢ - \text{رتبة م} = ٢٥ \times \frac{٢٠}{١٠٠} = ٥$$

وبما أن رتبة م موجودة ضمن التكرار التراكمي فإن م = الحد الفعلي المقابل للرتبة وهذا يعني بأن م = ٢٩٥

$$٣ - \text{رتبة م} = ٢٥ \times \frac{٥٠}{١٠٠} = ١٢,٥$$

ت = التكرار التراكمي السابق لرتبة المئين = ١٠

ت = التكرار التراكمي اللاحق لرتبة المئين = ١٧

ل = طول الفئة المئينية = الحد الفعلي المقابل لـ ت - الحد الفعلي المقابل لـ ت

$$١٠ = ٣٩٥ - ٤٩٥ =$$

$$\text{م} = \text{رتبة المئين م} - \text{ت} = ١٢,٥ - ١٠ = ٢,٥$$

$$\text{ص} = \text{ت} - \text{رتبة م} = ١٧ - ١٢,٥ = ٤,٥$$

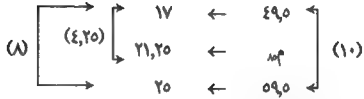
الآن باستعمل الصيغة (١٤).

$$\text{م} = ٥٠ - \text{الحد الفعلي المقابل لـ ت} + \left(\frac{\text{م}}{\text{ص}} \right) \times \text{ل}$$

$$٤٥,٥ = ٥,٥٥ + ٣٩٥ = ١٠ \times \left(\frac{٢,٥}{٤,٥} \right) + ٣٩٥ =$$

$$-٤ \text{ رتبة } م = ٢٥ \times \frac{٨٥}{١٠٠} = ٢١,٢٥$$

الآن: يعمل النسبة والتناسب.



$$\diamond \text{ م} = ٤٩,٥ + ١٠ \times \left(\frac{٤,٢٥}{٨} \right) = ٥,٣٦٢٥ + ٤٩,٥ = ٥٤,٨٦٢٥$$

$$-٥ \text{ رتبة } م = ٢٥ \times \frac{٦٨}{١٠٠} = ١٧$$

وبما أن رتبة ٦٨ ظاهرة خلال التكرار التراكمي \Leftarrow م = ١١ = الحد الأعلى الفعلي المقابل لها = ٤٩,٥.

الطريقة الثالثة: (الطريقة البيانية):

خطوات الحل:

- ١- تكوين الجدول التراكمي الصاعد
- ٢- رسم المنحنى (المضلع) التراكمي الصاعد
- ٣- تحديد رتبة المئين
- ٤- تعيين رتبة المئين على المحور العمودي (محور التكرار التراكمي) ومن هذه النقطة رسم خط أفقي حتى يتقاطع مع المنحنى (المضلع) التراكمي ومن نقطة التقاطع ننزل عمود على المحور الأفقي فتكون نقطة الالتقاء مع المحور الأفقي هي قيمة المئين.

مثال (٥): إليك الجدول التالي:

الفئات	٤٨-٤٠	٥٧-٤٩	٦٦-٥٨	٧٥-٦٧	المجموع
التكرار	٥	٦	١١	١٨	٤٠

أوجد بيانية: (١) م = ١١ (٢) م = ٣٣ (٣) م = ٣٣

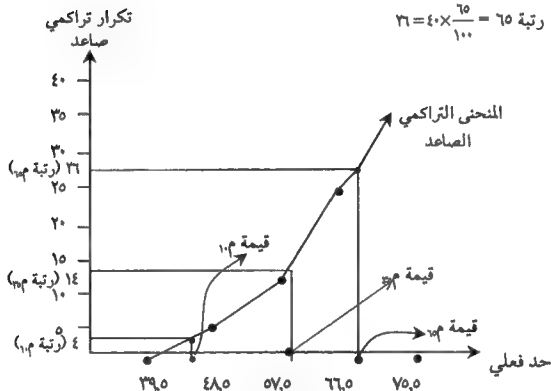
الحل: بتكوين الجدول التراكمي الصاعد .

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٣٩-٣٦	صفر	٣٩,٥	صفر
٤٨-٤٠	٥	٤٨,٥	٥
٥٧-٤٩	٦	٥٧,٥	١١
٦٦-٥٨	١١	٦٦,٥	٢٢
٧٥-٦٧	١٨	٧٥,٥	٤٠
الجموع	٤٠		

$$١- \text{رتبة م} ١٠ = ٤٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٤$$

$$٢- \text{رتبة م} ٣٥ = ٤٠ \times \frac{٣٥}{١٠٠} = ١٤$$

$$٣- \text{رتبة م} ٦٥ = ٤٠ \times \frac{٦٥}{١٠٠} = ٢٦$$



ملاحظة: من خلال التعريف يتضح بأن المئين الخمسون هو الوسيط.

(٢-٦-٣) الربيعات (Quartiles):

الرابع هو المقياس الذي يقسم المساحة تحت المضلع التكراري لتوزيع ما إلى أربعة أجزاء متساوية. لذلك فإن هنالك ثلاثة ربيعات هي الربع الأول (الرابع الأدنى)،

الربيع الثاني (الربيع الأوسط) وهو الوسيط، الربيع الثالث (الربيع الأعلى) وسنرمز للربيعات بالرمز (ر) حيث ك = ١، ٢، ٣ ونلأ على التعريف يتضح ما يلي:

الربيع الأول (ر): هو القيمة التي يسبقها $\left(\frac{1}{4}\right)$ البيانات ويليها $\left(\frac{3}{4}\right)$ البيانات

وبالتالي ر = المئين الخامس والعشرون = ٢٥م

وعليه الربيع الثاني (ر) = المئين الخمسون = الوسيط.

الربيع الثالث (ر) = المئين الخامس والسبعون .

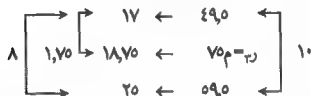
أما طريقة حسابها فيتم بنفس طرق حساب المئينات.

مثال (٦): بالاستعانة بالجدول الوارد في المثل الرابع احسب الربيع الأعلى.

الحل: الربيع الأعلى ر = ٣٢ م

$$\text{رتبة ر} = \text{رتبة م} = ٣٢ \times \frac{٧٥}{١٠٠} = ٢٥ \times \frac{٧٥}{١٠٠} = ١٨,٧٥$$

الآن : بعمل النسبة والتناسب.



$$٥١,٦٧٥ = ٢,١٨٧٥ + ٤٩٥ = ١٠ \times \left(\frac{١,٧٥}{٨}\right) + ٤٩٥ = ٣٢ م$$

(٣-٦-٣) العشريرات (Deciles):

العشير هو المقياس الذي يقسم المساحة تحت المضلع التكراري إلى عشرة أجزاء متساوية فالعشريرات هي: العشير الأول، العشير الثاني، العشير الثالث، ...، العشير التاسع وسنرمز للعشير رقم ك بالرمز (ش ر).

وعندئذ فإن : ش = العشير الأول = المئين العاشر = ١٠م

ش = العشير الثاني = المئين العشرون = ٢٠م

ش = العشير التاسع = المئين التسعون = ٩٠م

ويتم حسابها بنفس الطرق التي تم بها حساب المئينات.
 مثال (٧): بالاستعانة بالجدول الوارد في المثل الرابع أحسب العشير الثالث والخامس.

الحل: (١) العشير الثالث = م. ٣٠

$$\text{رتبة ش} = ٣ \text{ رتبة م} = ٣٠ \times \frac{٣٠}{١٠٠} = ٧,٥$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \rightarrow & & \leftarrow \\ ٥ & \left[\begin{array}{cc} ٨ & \leftarrow ٢٩,٥ \\ ٧,٥ & \leftarrow \text{ش} = ٣ - ٣٠ \\ ١٠ & \leftarrow ٣٩,٥ \end{array} \right. & \leftarrow ١٠ \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{ش} = ٣ - ٣٠ = ٣٩,٥ = ١٠ \times \left(\frac{٧,٥}{٥} \right) + ٢٩,٥ = ٣٤,٥ = ٥ + ٢٩,٥$$

٢- العشير الخامس = م. ٥٠ = ٤٥,٥ [كما في الحل الموجود في المثل ٤] .

أخر التحويلات الخطية على المئينات:

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات (الأولية أو في جدول) وأجرينا عليها التعديل التالي: ص = أ + ب.

حيث أ ، ب أعداد حقيقة، ص : المشاهدة قبل التعديل، ص: المشاهدة بعد التعديل فإن:

١- المئين رقم ك بعد التعديل = أ × المئين رقم ك قبل التعديل + ب

م د (ص) = أ × م د (س) + ب شريطة أ موجبة.

٢- إذا كانت أ سالبة فإن:

م ك (ص) = أ × م (١٠٠-ص) + ب

مثال (٨): إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان م. ١٥ وأجرينا التعديل التالي: ص = ٠,٦ س + ٧.

احسب المئين العاشر بعد التعديل.

الحل: المئين العاشر بعد التعديل = ٠,٦ × المئين العاشر قبل التعديل + ٧

$$= ٠,٦ \times ١٥ + ٧ = ١٦$$

مثال (٩)، إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان $m = 10$ ، $n = 8$ ، وأجرينا التعديل التالي: $ص = -0,7$ ، $س = 12$

أحسب المئين العشرون بعد التعديل.

الحل، $m = 20$ بعد التعديل $= -0,7 \times m \times (n-1) + 12$

$$12 + 8 \times -0,7 =$$

$$12 + 40 \times -0,7 =$$

$$16 = 12 + 28 =$$

(٧-٣) الرقب المئينية:

الرتب المئينية لمشاهدة ما: هي النسبة المئوية لل تكرارات التي تقل عن هذه المشاهدة بالنسبة إلى مجموع التكرارات الكلي.

$$\text{أي أن: الرتبة المئينية لمشاهدة ما} = \frac{\text{التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة}}{\text{مجموع التكرارات الكلي}} \times 100\%$$

ولتوضيح كيفية حسابها نورد المثال التالي:

مثال (١٠)، إليك الجدول التالي:

الفئات	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	المجموع
التكرار	٧	٣	٦	٤	٢٠

أوجد:

(١) الرتبة المئينية للمشاهدة (٢١).

(٢) الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٠).

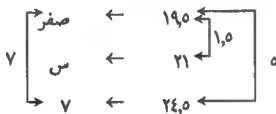
(٣) الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٤,٥).

الحل،

بتكوين الجدول التراكمي الصاعد:

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تصاعدي تراكمي
١٩-١٥	صفر	١٩,٥	صفر
٢٤-٢٠	٧	٢٤,٥	٧
٢٩-٢٥	٣	٢٩,٥	١٠
٣٤-٣٠	٦	٣٤,٥	١٦
٣٩-٣٥	٤	٣٩,٥	٢٠
المجموع	٢٠		

(١) المطلوب إيجاد الرتبة المثنية للمشاهدة (٢١) والبحث عن هذه المشاهدة ضمن الحدود الفعلية لمجدها تقع بين الحدين الفعليين ١٩,٥ ، ٢٤,٥ . فنجري النسبة والتناسب على النحو التالي:



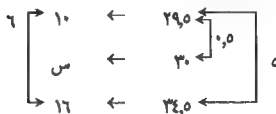
$$\therefore \text{س} = \text{صفر} + ٧ \times \left(\frac{١,٥}{٥}\right) + \text{صفر} = \frac{١٠,٥}{٥} = ٢,١$$

وهذا هو التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة.

$$\Leftarrow \text{الرتبة المثنية للمشاهدة (٢١)} = \frac{\text{س}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢,١}{٢٠} \times ١٠٠ = ١٠,٥$$

(٢) الرتبة المثنية للمشاهدة (٣٠):



∴ س = $10 + \left(\frac{10}{0}\right) \times 6 = 0,6 + 10 = 10,6$ التكرار التراكمي المقابل للملاحظة

$$\Leftrightarrow \text{الرتبة المئينية للملاحظة (30)} = 100 \times \frac{10,6}{20} = 53\%$$

٣- الرتبة المئينية للملاحظة (34,5) وبالمبحث عن هذه الملاحظة ضمن الحدود الفعلية نجد أنها موجودة وتقابل تكرار تراكمي مقداره (16) وتطبق قانون الرتبة المئينية
لنجد:

$$\begin{aligned} \text{الرتبة المئينية للملاحظة (34,5)} &= 100 \times \frac{\text{التكرار التراكمي المقابل للملاحظة}}{\text{مجموع التكرارات}} \\ &= 100 \times \frac{16}{20} = 80\% \end{aligned}$$

ملاحظات:

- ١- نلاحظ بأن المئين هو قيمة على المحور الأفقي والرتبة هي نسبة مئوية.
- ٢- في حالة المئين فإننا نعطي نسبة مئوية (وهي رقم المئين). فنحاول إيجاد قيمة على المحور الأفقي (محور القيم) بحيث تكون هذه النسبة مساوية لنسبة عدد البيانات الأقل من هذه القيم إلى عدد البيانات الكلي.
- ٣- الرتبة المئينية: فإننا نعطي ملاحظة ما فنحاول إيجاد النسبة المئوية لتكرارات القيم التي تقل عن هذه الملاحظة.

مسائل محلولة:

مسألة (١): كانت علامات (٩) طلاب في امتحان قصير نهايته العظمى (١٥) كالآتي:
١٢، ١١، ١٣، ٩، ٨، ٦، ٥، ٣، ١٤.

أوجد: (١) الوسط الحسابي. (٢) الوسيط. (٣) المئين الثلاثون.

$$\text{الحل: } ١ - \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12+11+13+9+8+6+5+3+14}{9} = \frac{81}{9} = 9$$

٢ - سنكون جدول يبين المشاهدة وترتيبها كالآتي:

العلامة	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٣	١٤
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

$$\text{بما أن عدد المشاهدات فردي فإن رتبة الوسيط} = \frac{١+٥}{٢} = \frac{١+٩}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$

وبالتالي فالوسيط = القيمة المقابلة للرتبة ٥ ويساوي (٩).

٣ - بالاستفادة من الجدول الوارد في (٢)

$$\text{رتبة المئين الثلاثون} = (١+٩) \times \frac{٣٠}{١٠٠} = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٦$$

مسألة (٢): الجدول التالي يبين المعدلات الفصلية لإحدى الطالبات في إحدى الكليات التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية.

الفصل الدراسي	الأول ٢٠٠٠ / ١٩٩٩	الثاني ٢٠٠٠ / ٩٩	الصففي ٢٠٠٠	الأول ٢٠٠١ / ٢٠٠٠	الثاني ٢٠٠١ / ٢٠٠٠
المعدل	٥٩	٦٧	٦٥	٦٨	٧٠
عدد الساعات المعتمدة	١٥	١٨	٩	١٨	١٢

احسب معدلها التراكمي.

الحل:

مجموع حواصل ضرب المعدلات الفصلية بالساعات المعتمدة

$$\text{المعدل التراكمي} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب المعدلات الفصلية بالساعات المعتمدة}}{\text{مجموع الساعات المعتمدة}}$$

$$\frac{12 \times 70 + 18 \times 78 + 9 \times 75 + 18 \times 77 + 10 \times 59}{12 + 18 + 9 + 18 + 10} =$$

$$75.83 = \frac{4740}{72} = \frac{840 + 1224 + 585 + 1206 + 880}{72}$$

مسألة (٣): إذا كانت علامات إحدى الطلبة في كلية الهندسية هي: ٨٥، ٧٤، ٨٣، ٨٦، ٩١،
 من علماً بأن الساعات المعتمدة لهذه المساقات هي على الترتيب ٣، ٢، ٤،
 ٦، ٣، والمعدل الفصلي لها يساوي (٨٥) أوجد قيمة س.

$$\frac{3 \times 85 + 2 \times 91 + 4 \times 86 + 3 \times 83 + 2 \times 74 + 3 \times 80}{3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 3} = 85 = \text{المعدل الفصلي}$$

$$\Leftarrow 20 \times 85 = 1700 + 1488 + 332 + 516 + 182 + 3 = \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = 1700 - 1488 - 332 - 516 - 182 = 37$$

$$\therefore \text{س} = \frac{37}{3} = 89$$

مسألة (٤): إذا كان $\sum_{i=1}^n (\text{سر} - 35) = 40$ ، $n = 20$ إذا علمت بأن الوسط الفرضي =
 ٣٥ أوجد $\overline{\text{س}}$.

$$\text{الحل: لتكن } \overline{\text{ح}} - \text{سر} - 35 \text{ فإن } \overline{\text{س}} = \text{ف} + \frac{\sum \text{ح}}{n}$$

$$\therefore \overline{\text{س}} = 35 + \frac{40}{20} = 37 = 35 + 2$$

مسألة (٥): إذا كان $\sum_{i=1}^n (\text{سر} + \text{ص}) = 330$ وكان $\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} = 15$ أوجد $\overline{\text{س}}$ علماً بأن

$$\overline{\text{سر}} = 20$$

$$\text{الحل: } \sum_{i=1}^n (\text{سر} + \text{ص}) = n (\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}})$$

$$330 = 20 \times n \Rightarrow n = 16.5$$

$$\sum_{i=1}^n \text{سر} + \sum_{i=1}^n \text{ص} = 330$$

$$200 + \sum_{i=1}^n \text{ص} = 330 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \text{ص} = 130$$

$$\therefore \overline{\text{ص}} = \frac{130}{16.5} = 9.9$$

تمارين الوحدة الثالثة

س١: لديك البيانات ٩، ١٠، ٦، ٧، ٨، ٩، ٧، ٢، ٥ احسب ما يلي:

- (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط.
(ج) المنوال. (د) المئين الخامس والعشرون.
(هـ) المئين الخمسون. (و) الربيع الأدنى.
(ز) الربيع الأعلى. (ح) العشير السادس.

س٢: لديك القيم ١٧-، ٣٤-، ٥٠، ٦٤، ١٥، ٩، ٣، ١٢ احسب ما يلي:

- (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط (ج) المنوال

س٣: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للأجور الأسبوعية لـ ٥٠٠ عامل في مصنع.

الفئات	١٠-١	٢٠-١١	٣٠-٢١	٤٠-٣١	٥٠-٤١	٦٠-٥١	٧٠-٦١	٨٠-٧١	٩٠-٨١
التكرار	١٠	٢٠	١٠٠	١٨٠	١٢٠	٥٠	١٥	٣	٢

احسب ما يلي:

- (١) الوسط الحسابي للأج (٢) الوسيط (٣) المنوال بطريقة بيرسون
(٤) المنوال بطريقة الرافعة (٥) المنوال بيانياً (٦) الربيع الأول والثالث
(٧) المئين التسعون (٨) المنوال التقريبي

س٤: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري قيمة المبيعات في معرض الساعات المباع خلال أسبوع بالدينار الأردني.

قيمة المبيعات (الفئات)	٦٥-٧٥	٧٦-٨٦	٨٧-٩٧	٩٨-١٠٨	١٠٩-١١٩
عدد الساعات	١٣	١٢	١٥	١٠	١٠

احسب ما يلي:

- (١) الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (٢) الوسيط بطريقة القانون.
(٣) المئين السبعون. (٤) المئين الثاني والستون بيانياً.
(٥) المنوال بيانياً. (٦) الرتبة المئينية للمشاهدة (٩)
(٧) الرتبة المئينية للمشاهدة (١٠، ٨٥) (٨) الربيع الأدنى

س٥: ثلاثة من مدرّس الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم ٨٢، ٧٩، ٧٤ في شعبهم المكونة من ١٧، ٢٥، ٣٢ طالباً على الترتيب أوجد متوسط الدرجات في جميع الفصول.

س٦: أخذت عيّنتان من مجتمعين فأعطتا النتائج التالية:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 200 \text{ حسب.}$$

(١) الوسط الحسابي لكل عينة.

(٢) دجت العيتين أوجد الوسط الحسابي للمجموعة النقبة.

س٧: إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمتوال والمئين الستون لمجموعة من العلامات هي على الترتيب ٣٥، ٤٢، ٤٧، ٤٥ وأجرينا التعديل التالي: $\frac{1}{4}$ س + ١١ حيث

س: العلامة قبل التعديل وحن: العلامة بعد التعديل أوجد الوسط والوسيط والمتوال والمئين الستون بعد التعديل.

س٨: مجموعة من البيانات فيها: $\bar{x} = 50$ ، $n = 20$. أوجد مجموع البيانات.

س٩: إذا كان المحرافات ستة قيم عن وسطها الحسابي هي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ١٥- أوجد قيمة أ.

س١٠: لمجموعة من البيانات اختير العدد (١٥) كوسط فرضي، إذا علمت بأن مجموع المحرافات هذه البيانات عن الوسط الفرضي يساوي (٢٠٠) وكان عند البيانات يساوي (٢٠) أوجد الوسط الحسابي.

س١١: إذا كانت الأوساط الحسابية لعلامات مادة الإحصاء التربوي ثلاث شعب هي ٥٠، ٤٠، س وكانت أعداد الشعب على التوالي ٢٠، ٤٠، ٣٠ أحسب قيمة س إذا علمت بأن قيمة الوسط المرجح لهذه الشعب (٤٥).

س١٢: إذا كان الوسط الحسابي لشعبة عدد طلابها (٣٠) يساوي (٦٠) وكان المتوسط الحسابي لأول (٥) طلاب يساوي (٧٠) أوجد الوسط الحسابي لباقي طلبة الشعبة.

س١٣: الجدول التالي يعطي المعدلات الفصلية لإحدى طالبات في كلية مجتمع.

الفصل الدراسي	المعدل الفصلي	عدد الساعات	الفصل الدراسي	المعدل الفصلي	عدد الساعات
الأول ٩٦/٩٥	٧٥	١٣	الأول ٩٧/٩٦	٧٨.٥	١٨
الثاني ٩٦/٩٥	٧٦	١٧	الثاني ٩٧/٩٦	٧٧	١٥

أحسب المعدل التراكمي لهذه الطالبة.

س١٤: الجدول التالي يبين أوزان (٥٠) شخص.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠	٨٥
عدد الأشخاص	٣	٢	١٠	١١	١٤	٦	٤

أحسب ما يلي:

(١) الوسط الحسابي (٢) الوسيط (٣) المتوال (٤) المئين الستون

مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتفرطح

Measures of Dispersion, Moments, Skewness & Kurtosis

- (١-٤) المدى.
- (٢-٤) نصف المدى الربيعي.
- (٣-٤) الانحراف المتوسط.
- (٤-٤) الانحراف المعياري.
- (٥-٤) التباين.
- (٦-٤) أثر التحويلات الخطية على مقاييس التشتت.
- (٧-٤) صفات مقاييس التشتت
- (٨-٤) مقاييس التشتت النسبية
- (١-٨-٤) معامل التغير.
- (٢-٨-٤) القيمة المعيارية
- (٩-٤) العزوم.
- (١٠-٤) مقاييس الالتواء.
- (١١-٤) مقاييس التفرطح.
- (١٢-٤) مسائل محلولة.
- تمارين الوحدة

مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتفرطح

Measures of Dispersion, Moments, Skewness & Kurtosis

مفهوم التشتت: التشتت أو التركيز من أهم خصائص البيانات فإذا كان البيانات متجانسة ومتشابهة وغير متباعدة عن بعضها أي مركزة حول بعضها وبالتالي حول وسطها الحسابي، أما إذا كانت مجموعة البيانات متباعدة ومتباعدة عن بعضها وغير متجانسة فيقال أنها بيانات متشتتة. وللتشتت أهمية لأنه ربما تتساوى المتوسطات لأكثر من مجموعة ولكن هذه المجموعات تختلف كثيراً من حيث التجانس، فنقع بالخطأ عندما نقول بأنها متشابهة.

تعريف مقياس التشتت: هو المقياس الذي يستعمل كمؤشر إحصائي لتحديد درجة التركيز أو التشتت.

ملاحظة: يجب معرفة بأن درجة التشتت أما إن تكون معلومة (= صفر) أو ضعيفة أو كبيرة ويجب المعرفة بأن مقياس التشتت لا يمكن أن يكون سالباً (لأنها مقاييس تباعد (مسافة)).

ومن أهم مقاييس التشتت:

- أ - المدى.
- ب - نصف المدى الربيعي.
- ج - الانحراف المتوسط
- د - الانحراف المعياري
- هـ - التباين.

(١-٤) المدى:

يعرف المدى بأنه الفرق بين أكبر مشاهدة وأقل مشاهدة.

أ) في حالة المفردات: يعرف المدى في حالة المفردات على النحو التالي:

المدى = أكبر قيمة - أقل قيمة.

مثال (١)، أوجد المدى للمشاهدات التالية: ١٧، ١٤، ٣، ٥، ٦، ٣، ٠.

الحل: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٧ - (١٧ -) - ١٤ = ١٧ + ١٤ = ٣١

ب- في حالة الجداول التكرارية:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للفترة الأخيرة - الحد الأدنى الفعلي للفترة الأولى.
مثال (٢)، إذا كانت الفترة الأولى في جدول تكراري هي (٣٠-٣٩) والفترة الأخيرة في الجدول هي (٧٠-٧٩) أوجد مدى الجدول.

الحل: المدى = الحد الأعلى الفعلي للفترة الأخيرة - الحد الأدنى الفعلي للفترة الأولى
 $50 = 79.5 - 29.5 =$

(٢-٤) نصف المدى الربيعي:

يعرف نصف المدى الربيعي بأنه الفرق بين الربيع الأعلى والأدنى مقسوماً على ٢.
نصف المدى الربيعي = $r = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (١)

مثال (٣)، إذا كان الربيع الأعلى لمجموعة من البيانات = ١٢ والربيع الأدنى يساوي (٨) أوجد نصف المدى الربيعي.

الحل: نصف المدى الربيعي = $r = \frac{12 - 8}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مثال (٤)، الجدول التالي يبين علامات شعبة ما في أحد المساقات الدراسية.

الفتات	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	المجموع
التكرار	٣	٧	٦	٤	٢٠

أوجد نصف المدى الربيعي.

الحل: يكون الجدول التراكمي الصاعد

الفتات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
١٩-١٥	صفر	١٩,٥	صفر
٢٤-٢٠	٣	٢٤,٥	٣
٢٩-٢٥	٧	٢٩,٥	١٠
٣٤-٣٠	٦	٣٤,٥	١٦
٣٩-٣٥	٤	٣٩,٥	٢٠
المجموع	٢٠		

$$١٥ = ٢٠ \times \frac{٧٥}{١٠٠} = {}_{١٥}م \text{ رتبة م}$$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} ١٠ \\ ٥ \\ ١٦ \end{array} \right] & \leftarrow & \left[\begin{array}{c} ٢٩,٥ \\ ٧٥م \\ ٣٤,٥ \end{array} \right] \end{array}$$

$$٥ \times \frac{٥}{٧} + ٢٩,٥ = {}_{١٥}م \quad \diamond$$

$$٣٣,٦٦ = ٤,١٦ + ٢٩,٥ = \frac{٢٥}{٧} + ٢٩,٥ =$$

$$٥ = ٢٠ \times \frac{٢٥}{١٠٠} = {}_{٢٥}م \text{ رتبة م}$$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} ٣ \\ ٢ \\ ١٠ \end{array} \right] & \leftarrow & \left[\begin{array}{c} ٢٤,٥ \\ ٢٥م \\ ٢٩,٥ \end{array} \right] \end{array}$$

$$\frac{١٠}{٧} + ٢٤,٥ = ٥ \times \frac{٢}{٧} + ٢٤,٥ = {}_{٢٥}م \quad \diamond$$

$$٢٥,٩٢ = ١,٤٢ + ٢٤,٥ =$$

$$٣,٨٧ = \frac{٧,٧٤}{٢} = \frac{٢٥,٩٢ - ٣٣,٦٦}{٢} = \frac{٣٢ - ٣٤}{٢} \text{ نصف المدى الربيعي} \quad \diamond$$

(٣-٤) الانحراف المتوسط (The Mean Deviation):

هو مجموع القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عددها.

تعريف: تعرف القيمة المطلقة للعدد s على النحو التالي:

$$|s| = \begin{cases} s, & s \geq 0 \\ -s, & s < 0 \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي فإن } |٤| = ٤, |٣| = ٣, |٦,٥| = ٦,٥$$

أي أن القيم المطلقة للعدد هو تجريد من الإشارة السالبة وجعل إشارته موجبة.

أ - في حالة المفردات: ليكن لدينا المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n وسطها الحسابي \bar{x} فإن الانحراف المتوسط (ح.م) يعرف على النحو التالي:

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{ح.م} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (2) \dots\dots\dots$$

خطوات حسابه:

- (١) إيجاد الوسط الحسابي للمشاهدات.
 - (٢) إيجاد المخافات القيم عن وسطها الحسابي.
 - (٣) أخذ القيمة المطلقة للانحرافات في الخطوة (٢).
 - (٤) إيجاد مجموع القيم المطلقة للانحرافات في الخطوة (٣).
 - (٥) تطبيق المعادلة رقم (٢).
- مثال (٤)، أوجد الانحراف المتوسط للمشاهدات ٣، ٨، ٧، ٤، ٦، ٩، ١٠، ١، ١٠.

$$\text{الحل: (١) } \bar{x} = \frac{1+10+9+6+4+8+7+3}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

(٢) المخافات القيم عن وسطها الحسابي $x_i - \bar{x}$

$$= 3-6, 7-6, 8-6, 4-6, 6-6, 9-6, 10-6, 1-6 = -3, -2, -1, 2, 3, 4, 5, 0$$

(٣) القيم المطلقة للانحرافات هي: $|-3|, |-2|, |-1|, |2|, |3|, |4|, |5|, |0|$

$$\diamond \quad |x_i - \bar{x}| : 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 0$$

(٤) مجموع القيم المطلقة للانحرافات $= \sum |x_i - \bar{x}| = 3+2+1+2+3+4+5+0 = 20$

$$(٥) \text{ باستعمل المعادلة (٢): ح.م} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{20}{8} = 2.5$$

ب) في حالة الجداول التكرارية: ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته x_1, x_2, \dots, x_m والتكرارات المقابلة هي f_1, f_2, \dots, f_m فإن الانحراف المتوسط (ح.م) يعرف على النحو التالي:

$$\text{ح.م} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{\sum f_i} \quad (3) \dots\dots\dots$$

خطوات حسابه:

- (١) إيجاد مراكز الفئات.
- (٢) إيجاد الوسط الحسابي.
- (٣) إيجاد انحرافات مراكز الفئات من الوسط الحسابي.
- (٤) أخذ القيم المطلقة للانحرافات في الخطوة (٣).
- (٥) ضرب القيم المطلقة للانحرافات بالتكرارات المقابلة.
- (٦) تطبيق المعادلة (٣).

مثال (٥)، أوجد الانحرافات المتوسط للجدول التالي:

الفئات	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	٣٩-٣٥	المجموع
التكرار	٣	٧	٤	٦	٢٠

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفئات	ت	مركز الفئة س _ر	س _ر × ت _ر	س _ر - س	س _ر - س	س _ر - س × ت _ر
٢٤-٢٠	٣	٢٢	٦٦	٨,٢٥ - ٣٠,٢٥ - ٢٢	٨,٢٥ - ٨,٢٥ = ٠	٢٤,٧٥ = ٣ × ٨,٢٥
٢٩-٢٥	٧	٢٧	١٨٩	٣,٢٥ - ٣٠,٢٥ - ٢٧	٣,٢٥ - ٣,٢٥ = ٠	٢٢,٧٥ = ٧ × ٣,٢٥
٣٤-٣٠	٤	٣٢	١٢٨	١,٧٥ - ٣٠,٢٥ - ٣٢	١,٧٥ - ١,٧٥ = ٠	٧ = ٤ × ١,٧٥
٣٩-٣٥	٦	٣٧	٢٢٢	٦,٧٥ - ٣٠,٢٥ - ٣٧	٦,٧٥ - ٦,٧٥ = ٠	٤٠,٥٠ = ٦ × ٦,٧٥
المجموع	٢٠		٦٠٥			٩٥

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{s} = \frac{605}{20} = 30,25$$

$$م.ح = \frac{\sum (s_r - \bar{s}) \times t_r}{\sum t_r} = \frac{95}{20} = 4,75$$

(٤-٤) الانحراف المعياري (Standard Deviation):

(١) في حالة المشاهدات المفردة هنالك ثلاث طرق لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العامة): ليكن لدينا المشاهدات س_١، س_{هـ} وسطها الحسابي (\bar{s}) فإن الانحراف المعياري (σ) يعرف على النحو التالي:

$$(٤) \dots\dots\dots \frac{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{n} = \sigma$$

خطوات حسابه:

- (١) إيجاد الوسط الحسابي للملاحظات.
- (٢) إيجاد الانحرافات الملاحظات عن الوسط الحسابي.
- (٣) إيجاد مربعات الانحرافات الملاحظات التي وجدناها في الخطوة (٢).
- (٤) إيجاد مجموع مربعات الانحرافات الملاحظات عن وسطها الحسابي.
- (٥) تطبيق المعادلة رقم (٤).

مثال (٦)، أوجد الانحراف المعياري للملاحظات ١، ٢، ٣، ٤، ٥.

$$\text{الحل: (١) } \bar{x} = \frac{١+٢+٣+٤+٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

(٢) الانحرافات الملاحظات عن وسطها الحسابي: $(x_i - \bar{x})$ هي:

$$١-٣، ٢-٣، ٣-٣، ٤-٣، ٥-٣ = -٢، -١، ٠، ١، ٢$$

(٣) مربعات الانحرافات الملاحظات عن وسطها الحسابي $= (x_i - \bar{x})^2$ هي:

$$٢، ١، ٠، ١، ٤ = ٢(-٢)، ١(-١)، ٠(٠)، ١(١)، ٤(٢)$$

(٤) مجموع مربعات الانحرافات الملاحظات عن وسطها الحسابي $= \sum (x_i - \bar{x})^2$

$$= ١٠ = ٤ + ١ + ٠ + ١ + ٤$$

$$(٥) \text{ بتطبيق المعادلة رقم (٤) ينتج : } \sigma = \frac{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{n} = \frac{\sqrt{١٠}}{٥}$$

الطريقة الثانية: يعرف الانحراف المعياري على النحو التالي:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \dots\dots\dots (٥)$$

خطوات حسابه:

- (١) إيجاد الوسط الحسابي (\bar{x}) .
- (٢) إيجاد مربع القيم (x_i^2) .
- (٣) إيجاد مجمع مربع القيم $\sum x_i^2$.
- (٤) تطبيق الصيغة رقم (٥).

مثال (٧)، أوجد الانحراف المعياري للملاحظات الواردة في المثال (٦).
الحل: (١) $\bar{x} = 3$.

(٢) مربع القيم $= \sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

(٣) مجموع مربع القيم $= \sum x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

$$(٤) \text{ بتطبيق الصيغة (٥). } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{55}{5} - 3^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

الطريقة الثالثة: [طريقة الوسط الفرضي]:

$$(٦) \text{ الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right) - \bar{x}^2} = \sigma$$

حيث \bar{x} : انحراف القيمة عن الوسط الفرضي.
خطوات حسابه:

(١) اختيار الوسط الفرضي (ف).

(٢) إيجاد انحرافات القيم عن الوسط الفرضي (ح).

(٣) إيجاد مربع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي $= (\text{ح})^2$.

(٤) إيجاد مجموع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي $(\sum \text{ح})$.

(٥) إيجاد مجموع مربع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي $(\sum \text{ح}^2)$.

(٦) تطبيق الصيغة (٦).

مثال (٨)، أوجد الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي للملاحظات -٣، ١، ٤، ٤، ٤

الحل: (١) نختار الوسط الفرضي $f = 1$

(٢) يتكوّن جدول الحل على النحو التالي:

القيمة x_i	$\text{ح} = x_i - f$	ح^2
-٣	-٣ - ١ = -٤	١٦
٣	٣ - ١ = ٢	٤
١	١ - ١ = ٠	٠
٤	٤ - ١ = ٣	٩
٤	٤ - ١ = ٣	٩
المجموع	٤	٣٨

الآن بتطبيق الصيغة رقم (٦).

$$\sqrt{6,91} = \sqrt{0,64 - 7,6} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{38}{5}} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{38}{5}} = \sigma$$

ب- في حالة التوزيعات التكرارية:

هنالك ثلاثة طرق لحسابه هي:

الطريقة الأولى، [الطريقة العامة] ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هي س،

س، ، س_م والتكرارات المقابلة هي ت، ... ت_م فإن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2 \times ت}{\sum ت}} \quad (٧)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد مراكز الفئات.

(٢) إيجاد الوسط الحسابي.

(٣) إيجاد الانحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي.

(٤) إيجاد مربعات الانحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي.

(٥) ضرب مربعات الانحرافات في الخطوة الرابعة بالتكرارات المقابلة.

(٦) تطبيق الصيغة رقم (٧).

مثال (٩): أوجد الانحراف المعياري للجدول التالي:

الفئات	٩-٥	١٤-١٠	١٩-١٥	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	الجموع
التكرار	٤٠	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠٠

الحل: بتكوين جدول الحل على النحو التالي:

الفئات	ت	مراكز الفئة س	س، ت، (س - $\bar{س}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢	(س - $\bar{س}$) ^٢ × ت
٩-٥	٤٠	٧	٨-١٥-٧	٦٤=٢(٨-)	٢٥٦٠=٤٠×٦٤
١٤-١٠	١٠	١٢	٣-١٥-١٢	٩=٢(٣-)	٩٠=١٠×٩
١٩-١٥	٢٠	١٧	٢-١٥-١٧	٤=٢(٢)	٨٠=٢٠×٤
٢٤-٢٠	١٠	٢٢	٧-١٥-٢٢	٤٩=٢(٧)	٤٩٠=١٠×٤٩
٢٩-٢٥	٢٠	٢٧	١٢-١٥-٢٧	١٤٤=٢(١٢)	٢٨٨٠=٢٠×١٤٤
الجموع	١٠٠				٦١٠٠

$$\bar{x} = \frac{1000}{100} = 10$$

الآن بتطبيق الصيغة رقم (٧):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_r - \bar{x})^2}{\sum f_r}} = \sqrt{\frac{7100}{100}} = \sqrt{71} = 8.43$$

الطريقة الثانية: ليكن جدول تكراري مراكز فئاته س، من والتكرارات المقابلة هي ت،، ت م فإن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum s_r^2 x_r - \frac{(\sum s_r x_r)^2}{\sum f_r}}{\sum f_r}} \quad (٨)$$

خطوات حسابيه:

- (١) إيجاد مراكز الفئات.
 - (٢) إيجاد الوسط الحسابي.
 - (٣) إيجاد مربع مراكز الفئات.
 - (٤) ضرب مربع مراكز الفئات بالتكرارات المقابلة.
 - (٥) تطبيق الصيغة رقم (٨).
- مثال (١٠): للجدول التالي احسب الانحراف المعياري.

الفئات	١٢-١٠	١٥-١٣	١٨-١٦	٢١-١٩	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٠	٥	٣٠

الحل: بتكوين جدول الحل :

الفئات	ت _ر	س _ر	س _ر × ت _ر	س _ر ^٢	س _ر ^٢ × ت _ر
١٢-١٠	٥	١١	٥٥	١٢١ = ١١ ^٢	٦٠٥ = ٥ × ١٢١
١٥-١٣	١٠	١٤	١٤٠	١٩٦ = ١٤ ^٢	١٩٦٠ = ١٠ × ١٩٦
١٨-١٦	١٠	١٧	١٧٠	٢٨٩ = ١٧ ^٢	٢٨٩٠ = ١٠ × ٢٨٩
٢١-١٩	٥	٢٠	١٠٠	٤٠٠ = ٢٠ ^٢	٢٠٠٠ = ٥ × ٤٠٠
المجموع	٣٠		٣٦٥		٧٤٥٥

$$\bar{x} = \frac{365}{30} = 12.16$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k \frac{f_j x_j^2}{n_j} - \frac{(\sum_{j=1}^k f_j x_j)^2}{n}}{n-1}} = \sigma : (8)$$

$$= \sqrt{\frac{147,87 - 248,5}{30}} = \sqrt{\frac{12,17}{30}} = 0,63$$

الطريقة الثالثة: الطريقة الوسط الفرضي:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k \frac{f_j x_j^2}{n_j} - \frac{(\sum_{j=1}^k f_j x_j)^2}{n}}{n-1}} = \sigma$$

(9)

خطوات حسابه:

- (1) اختيار وسط فرضي ف.
- (2) إيجاد المحرفات مراكز الفئات عن الوسط الفرضي (ح ر).
- (3) إيجاد حاصل ضرب الانحرافات في الخطوة (2) بالتكرار المقابل.
- (4) إيجاد مجموع حواصل الضرب للانحرافات بتكراراتها المقابلة.
- (5) إيجاد مربع الانحرافات في الخطوة (2).
- (6) إيجاد حاصل ضرب مربع الانحرافات بالتكرارات المقابلة.
- (7) إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة السابقة.
- (8) تطبيق الصيغة رقم (9).

مثال (11): للجدول التالي احسب الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.

الفئات	١٤-١٠	١٩-١٥	٢٤-٢٠	٢٩-٢٥	٣٤-٣٠	المجموع
التكرار	٧	٢	١	١٢	١٨	٤٠

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفئات	ت	مراكز الفئات من	ح = سر - ف	ح × ت	ح ^٢	ح × ت ^٢
١٤-١٠	٧	١٢	١٢-٢٧-١٥	١٠٥-	٢٢٥	١٥٧٥
١٩-١٥	٢	١٧	١٧-٢٧-١٠	٢٠-	١٠٠	٢٠٠
٢٤-٢٠	١	٢٢	٢٢-٢٧-٥	٥-	٢٥	٢٥
٢٩-٢٥	١٢	٢٧	٢٧-٢٧=٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠٠
٣٤-٣٠	١٨	٣٢	٣٢-٢٧=٥	٩٠	٢٥	٤٥٠
المجموع	٤٠			٤٠-		٢٢٥٠

$$\sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n} - \frac{(\sum x)^2}{n^2}\right)} = \sigma \text{ ينتج: (٩) } \\ \sqrt{\left(\frac{40}{40} - \frac{3200}{40^2}\right)} = \sqrt{1 - 0,25} = \sqrt{0,75} = 0,8660254 \approx 0,87$$

(٥-٤) التباين: (The Variance)

هو مربع الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز (σ^2) .

طريقة حسابه:

(١) نستخرج الانحراف المعياري.

(٢) نقوم بتربيع الجواب في الخطوة الأولى.

مثال (١٢): استخرج التباين للمشاهدات الواردة في المثال (٦).

الحل: بما أن الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{2}$

فإن التباين $= \sigma^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

مثال (١٣): استخرج التباين للجدول في المثال (١١).

الحل: بما أن الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{0,25}$

فإن التباين $= \sigma^2 = (\sqrt{0,25})^2 = 0,25$

(٦-٤) أشر التحويلات الخطية على مقاييس التشتت:

ليكن لدينا البيانات (الأولية أو في جدول) وعدلت هذه البيانات وفق المعادلة التالية:

$$ص = أ + ب$$

حيث أ، ب أعداد حقيقية.

س: المشاهدة قبل التعديل، ص: المشاهدة بعد التعديل.

فإن:

$$١- \text{المدى بعد التعديل} = |أ| \times \text{المدى قبل التعديل} \dots\dots\dots (١٠)$$

$$٢- \text{الانحراف المتوسط بعد التعديل} = |أ| \times \text{الانحراف المتوسط قبل التعديل}.$$

$$\text{ح.م (ص)} = |أ| \times \text{ح.م (س)} \dots\dots\dots (١١)$$

٣- الانحراف المعياري بعد التعديل = $| \bar{A} | \times$ الانحراف المعياري قبل التعديل.

$$\sigma_{\text{م}} = | \bar{A} | \times \sigma_{\text{ر}} \quad \text{..... (١٢)}$$

٤- التباين بعد التعديل = $| \bar{A} |^2 \times$ التباين قبل التعديل.

$$\sigma_{\text{م}}^2 = | \bar{A} |^2 \times \sigma_{\text{ر}}^2 \quad \text{..... (١٣)}$$

٥- نصف المدى الربيعي بعد التعديل = $| \bar{A} | \times$ نصف المدى الربيعي قبل التعديل.

$$R_{\text{م}} = | \bar{A} | \times R_{\text{ر}} \quad \text{..... (١٤)}$$

مثال (١٤)، إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات يساوي (٣) وضرينا كل مشاهدة بـ ٢ أوجد؟

(١) الانحراف المعياري بعد الضرب.

(٢) التباين قبل الضرب.

(٣) التباين بعد الضرب ما علاقته بالتباين قبل عملية الضرب.

الحل:

١- الانحراف المعياري بعد عملية الضرب = $2 \times$ الانحراف المعياري قبل العملية.

$$6 = 3 \times 2 =$$

٢- التباين قبل الضرب = مربع الانحراف المعياري قبل الضرب = $9 = 3^2$

٣- التباين بعد الضرب = مربع الانحراف المعياري بعد الضرب = $36 = 6^2$

أو التباين بعد الضرب = $4 \times 9 = 36$ التباين قبل الضرب

مثال (١٥)، إذا كان الانحراف المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات هما على الترتيب ٤، ٦ وجمعنا لكل مشاهدة العدد (٣) أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري بعد عملية الجمع.

الحل: بما أن مقياس التشتت لا تتأثر بالزيادة فإن الانحراف المتوسط والمعياري يبقيا كما هما.

مثال (١٦)، إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان الانحراف المتوسط لها ٥ والانحراف المعياري يساوي (٣) ونصف المدى الربيعي (٧) وأجرينا التعديل التالي.

ص = $9 - \frac{1}{3}$ حيث ص: المشاهدة قبل التعديل، ص: المشاهدة بعد التعديل. أوجد

الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ونصف المدى الربيعي والتباين بعد التعديل.

الحل:

الانحراف المتوسط بعد التعديل = ح.م (ص) = $\left| \frac{1-}{3} \right| \times$ الانحراف المتوسط قبل التعديل

$$\frac{0}{3} = 0 \times \frac{1}{3} =$$

الانحراف المعياري بعد التعديل = $\sigma_r = \left| \frac{1-}{3} \right| \times$ الانحراف المعياري قبل التعديل.

$$1 = 3 \times \left| \frac{1-}{3} \right| =$$

نصف المدى الربيعي بعد التعديل = $\left| \frac{1-}{3} \right| \times$ نصف المدى الربيعي قبل التعديل.

$$\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3} =$$

التباين بعد التعديل = $\left| \frac{1-}{3} \right| \times$ التباين قبل التعديل.

$$1 = 9 \times \frac{1}{9} = 1 \quad (3) \times \frac{1}{9} =$$

صفات مقاييس التشتت:

- ١- يتأثر المدى بالقيم الشاذة ويصبح مضللاً في بعض الحالات.
- ٢- لا يتأثر نصف المدى الربيعي بالقيم الشاذة إلا أنه أقل دقة من المدى.
- ٣- الانحراف المتوسط سهل التعريف وسهل الحساب إلا أنه لا ينحصر للعمليات الحسابية بسهولة إذ يجب تعديل الإشارة ويجب معرفة المفردات بعينها لمعرفة الانحراف المتوسط وبالتالي لا يوجد طريقة لحساب الانحراف المتوسط للمجموعة النقطية عن دمج مجموعتين من البيانات.
- ٤- يمكن تعريف الانحراف المعياري للعينة المسحوبة من المجتمع على النحو التالي

$$\text{للبيانات المفردة} \quad \text{ع (1)} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{حيث } n: \text{حجم العينة.}$$

أو

$$\text{ع (ب)} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1} - \frac{(\sum x)^2}{n^2}}$$

أو

$$\sqrt{\left(\frac{2.33}{n}\right)\left(\frac{n}{1-n}\right) - \frac{2.33}{1-n}} = ع \quad (ح)$$

مثال (١٧): بالرجوع إلى المثال رقم (٦) احسب الانحراف المعياري (ع):

الحل: بالاستفادة من المعلومات نجد بأن $3 \leq (س - س) = 10$ ، $n = 5$ وبالتالي فإن:

$$ع = \sqrt{\frac{10}{4}} = 1.57$$

مثال (١٨): بالاستفادة من المثال رقم (٨) احسب الانحراف المعياري (ع).

الحل: بما إن $3 \leq ح = 3.8$ ، $ع = 4$ ، $n = 5$

$$\sqrt{\left(\frac{3.8}{n}\right)\left(\frac{n}{1-n}\right) - \frac{3.8}{1-n}} = ع \quad \therefore$$

$$\sqrt{1.87} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{3.8}{4}} = ع$$

ملاحظة: إذا كان حجم العينة كبيراً ($n \leq 30$) فإن قيمة الانحراف المعياري (ع)

تصبح مقاربة جداً من قيمة الانحراف المعياري (σ).

(٥) إذا كان لدينا عينات أحجامها n_1, n_2, \dots, n_k مسحوبة من مجتمع حجمه (م)

وكانت كل عينة مستقلة عن الأخرى فيمكن تعريف التباين المشترك (المتجمع

على النحو التالي):

$$ع^2 = \frac{\left(\mu_1 - \mu\right)^2 n_1 + \left(\mu_2 - \mu\right)^2 n_2 + \dots + \left(\mu_k - \mu\right)^2 n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k - k}$$

حيث: $ع^2$: التباين للعينة رقم (ر).

$س$: الوسط الحسابي للعينة رقم (ر).

μ : الوسط الحسابي التجميعي.

k : عدد العينات المسحوبة.

مثال (١٩): إذا كانت لدينا العينات التالية كما في الجدول:

العينة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
ن	١٥٠	٢٠٠	٣٠٠	٢٥٠
\bar{x}	٤٠	٥٥	٦٠	٥٠
σ^2	١٦	٢٥	١٠٠	٩

دمجت هذه العينات مع بعضها البعض فأوجد:

(أ) الوسط الحسابي الناتج عن اللمج (الوسط التجميعي):

$$\mu_{\text{م}} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 + n_4 \bar{x}_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$= \frac{150 \times 40 + 200 \times 55 + 300 \times 60 + 250 \times 50}{150 + 200 + 300 + 250}$$

$$= \frac{17000 + 18000 + 11000 + 7000}{900} = \frac{47000}{900} = 52,22$$

(ب) التباين المشترك (σ^2): (التباين الناتج عن دمج المجموعات):

$$\sigma^2_{\text{م}} = \frac{n_1(\sigma_1^2 - s^2) + n_2(\sigma_2^2 - s^2) + n_3(\sigma_3^2 - s^2) + n_4(\sigma_4^2 - s^2)}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$= \frac{150(16 - 11,56) + 200(25 - 11,56) + 300(100 - 11,56) + 250(9 - 11,56)}{900}$$

$$= \frac{2384 + 2990 + 4970 + 2741}{900} = \frac{12085}{900} = 13,43$$

(ج) الانحراف المعياري الناتج عن اللمج ($\sigma_{\text{م}}$): $\sigma_{\text{م}} = \sqrt{13,43} = 3,66$

ملاحظة: مقاييس التشتت السابقة تسمى مقاييس تشتت مطلقة.

(٨-٤) مقاييس التشتت النسبية:

مقياس التشتت النسبي هو النسبة المئوية للتشتت المطلق ويصلح أساس لمقارنة تشتت التوزيعات المختلفة لأنه لا يعتمد على الوحدات المستعملة.

ومن مقاييس التشتت النسبية:

(٤-٨-١) معامل التغير (معامل الاختلاف) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{معامل التغير} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100\%$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% \quad (١٦)$$

مثال (٢٠)، متوسط علامات طلبة الأول الثانوي العلمي في مادة الرياضيات (٧٠) بالانحراف المعياري (١٠) ومتوسط علامات نفس الطلاب في الفيزياء (٧٥) بالانحراف المعياري (١٥) في أي من المادتين تتوزع العلامات بشكل أكثر تجانساً.

الحل:

$$\text{معامل التغير لمادة الرياضيات} = \frac{\text{الانحراف المعياري للرياضيات}}{\text{الوسط الحسابي للرياضيات}} \times 100\%$$

$$= 100 \times \frac{10}{70} = 14,29\%$$

$$\text{معامل التغير لمادة الفيزياء} = 100 \times \frac{15}{75} = 20\%$$

وبالتالي فإن العلامات في موضوع الرياضيات أكثر تجانساً.

مثال (٢١)، مجموعة من المصانع أ، ب، ج، د، أخذت عينات متساوية من العاملين فيها فكان الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية للأجور كما يلي:

المصنع	الوسط الحسابي للأجر	الانحراف المعياري
أ	٤٨٠	٣٠
ب	٦٠٠	٥٠
ج	٧٢٠	٢٥
د	٣٦٠	٢٠

رتب هذه المصانع حسب توافد العدالة في توزيع الأجور.

$$\text{الحل: معامل الاختلاف للمصنع أ} = 100 \times \frac{30}{480} = 6,25\%$$

$$\text{معامل الاختلاف للمصنع ب} = \frac{50}{100} \times 113 = 56.3$$

$$\text{معامل الاختلاف للمصنع ج} = \frac{20}{100} \times 117 = 23.4$$

$$\text{معامل الاختلاف للمصنع د} = \frac{20}{100} \times 106 = 21.2$$

معامل الاختلاف للمصنع ج > معامل الاختلاف للمصنع د > معامل الاختلاف للمصنع أ > معامل الاختلاف للمصنع ب وبالتالي فإن الأجور تتوزع بشكل أكثر عدالة في ج ثم د ثم في أ ثم في ب.

(٤-٨) العلامة المعيارية (القيمة المعيارية):

ليكن لدينا مجموعة من البيانات س،، س_ن ووسطها الحسابي (س̄) والانحراف المعياري (σ) فإن العلامة (القيمة) المعيارية (ز) تعطى بالعلاقة التالية:

$$z = \frac{\text{العلامة الخام} - \text{الوسط الحسابي}}{\sigma} = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} \quad \text{..... (١٧)}$$

الانحراف المعياري

فلاحظ من خلال التعريف بأن القيمة المعيارية هي المسافة على عين أو يسار الوسط الحسابي معبراً عنه بوحدات الانحراف المعياري. ويجدر بالملاحظة بأن التحويل إلى القيم المعيارية يعطينا مجتمعاً معيارياً وسطه الحسابي (صفر) وتباينه (١).

وكذلك فإن من خواص القيم المعيارية فإن تحويل القيم الخام في توزيع ما إلى قيم معيارية فإن توزيع القيم المعيارية يحتفظ بشكل التوزيع الأصلي. فإذا كان التوزيع الأصلي متماثلاً كان توزيع القيم المعيارية متماثلاً، وإذا كان ملتوياً نحو اليمين أو اليسار كان توزيع القيم المعيارية ملتوياً لليمين أو اليسار وهكذا.

مثال (٢٢): إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات ووسطها الحسابي (٦٠) والانحراف المعياري (١٠) أوجد ما يلي:

- ١- العلامة المعيارية المقابلة للعلامة الخام (٦٥) .
- ٢- العلامة المعيارية المقابلة للعلامة الخام (٥٥).
- ٣- العلامة المعيارية الخام المقابلة للوسط الحسابي.

- ٤- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (٢).
٥- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (-١,٥).
٦- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (صفر).

الحل:

١- بما أن $\bar{x} = ٦٠$ ، $\sigma = ١٠$ فإن القيمة المعيارية (ز) المقابلة للعلامة الخام (٦٥) هي:

$$z_١ = \frac{٦٥ - ٦٠}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$$

$$٢- z_٢ = \frac{٦٠ - ٥٥}{١٠} = ٠,٥$$

٣- العلامة المعيارية المقابلة للوسط الحسابي $z_٣ = \frac{\bar{x} - \bar{x}}{\sigma} = ٠$ صفر وبالتالي نلاحظ

دائماً بأن العلامة المعيارية المقابلة للوسط الحسابي = صفر.

٤- الآن، المطلوب العلامة الخام إذا علمت العلامة المعيارية.

العلامة المعيارية المعطاة هي $z = ٢ = \frac{\bar{x} - x}{\sigma} \Leftrightarrow x - \bar{x} = ٢ \times \sigma = ٢٠$ ومنها $x = ٨٠$.

$$٥- z = -١,٥ = \frac{\bar{x} - x}{\sigma} \Leftrightarrow x - \bar{x} = ١٥ = ١٥ - ٦٠ \Leftrightarrow x = ٤٥$$

$$٦- z = \text{صفر} = \frac{\bar{x} - x}{\sigma} \Leftrightarrow x - \bar{x} = ٠ \Leftrightarrow x = ٦٠$$

ونلاحظ بأن العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (صفر) هي الوسط الحسابي.

مثال (٢١): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في مادة الفيزياء يساوي (٦٥) والانحراف المعياري (٥) والوسط الحسابي لعلامات نفس الشعبة في مادة الكيمياء يساوي (٦٠) والانحراف المعياري (٣) وكانت علامتي غدير في الفيزياء والكيمياء ٦٧، ٦٢ على الترتيب فهل تحصيل غدير في الفيزياء أفضل منه في الكيمياء؟ ولماذا؟

الحل:

سنقوم بتحويل هاتين العلامتين (الخام) إلى علامات معيارية حتى نستطيع المقارنة.

علامة الفيزياء - الوسط الحسابي للفيزياء

الآن: العلامة المعيارية للفيزياء =

الانحراف المعياري للفيزياء

$$٠,٤ = \frac{٢}{٥} = \frac{٦٥ - ٦٧}{٥} =$$

$$٠,٦٧ = \frac{٢}{٣} = \frac{٦١ - ٦٢}{٣} = \text{العلامة المعيارية للكيمياء}$$

وبما أن العلامة المعيارية للكيمياء أكبر من العلامة المعيارية للفيزياء فإن تحصيل
غدير في الكيمياء أفضل.

مثال (٢٤)، إذا كانت علامتي ليلى وشنلى في امتحان ما هي ٦٧، ٥٠ والعلامات
المعيارية المقابلة هي على الترتيب ١، -٠,٧ فأوجد الوسط الحسابي والانحراف
المعياري لهذا الامتحان.

الحل: بما أن الوسط الحسابي (\bar{x}) والانحراف المعياري (σ) مجهولين، سنقوم بتكوين
معادلتين ومن ثم نقوم بحل هاتين المعادلتين لإيجاد الجاهيل.

$$\text{العلامة المعيارية المقابلة لعلامة ليلى} = ١ = \frac{\bar{x} - ٦٧}{\sigma} \Rightarrow \bar{x} - ٦٧ = \sigma \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{العلامة المعيارية المقابلة لعلامة شنلى} = -٠,٧ = \frac{\bar{x} - ٥٠}{\sigma} \Rightarrow \bar{x} - ٥٠ = ٠,٧\sigma \dots\dots (٢)$$

ويضرب المعادلة رقم (٢) بـ ١- وجمعها للأولى ينتج:

$$١٠ = \frac{١٧}{١,٧} = \sigma \text{ ومنها } ١٧ = \sigma$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج:

$$١٠ = \bar{x} - ٦٧ \text{ ومنها } \bar{x} = ٥٧$$

مثال (٢٥)، إذا كانت علامات أحمد وعبير وليلى في امتحان ما هي ٧٠، ٦٥، ٨٠
والعلامات المعيارية المقابلة هي ١، -١، ١، س أوجد قيمة س؟
الحل:

العلامة الخام - الوسط الحسابي

$$\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{العلامة المعيارية لأحمد}} = \text{تطبيق قانون العلامة المعيارية (ز)} =$$

$$\text{العلامة المعيارية لأحمد} = ١ = \frac{\bar{x} - ٧٠}{\sigma} \Rightarrow \bar{x} - ٧٠ = \sigma \dots\dots (١)$$

$$\text{العلامة المعيارية لعبير} = ١ = \frac{\bar{x} - ٦٥}{\sigma} \Rightarrow \bar{x} - ٦٥ = \sigma \dots\dots (٢)$$

العلامة المعيارية لليلى = ز = س = $\frac{\bar{س} - ٨٠}{\sigma} \leq \sigma \times س = ٨٠ - \bar{س} \dots (٣)$

وبحل المعادلتين (١) & (٢) أنياً ينتج : $\bar{س} = ٦٧,٥$ ، $\sigma = ٢,٥$.

وبالتعويض في (٣) ينتج : $٦٧,٥ - ٨٠ = س \times ٢,٥$

$$\Leftrightarrow ٢,٥ س = ١٢,٥ \text{ ومنها } س = \frac{١٢,٥}{٢,٥} = ٥$$

(٩-٤) العزوم (Moments)

تعريف (١) : في حالة المشاهدات المفردة. ليكن لدينا المشاهدات س_١، س_٢، ...، س_ن فيمكن تعريف العزم الرائي على النحو التالي:

$$(١) \text{ العزم الرائي حول الصفر } = \bar{ع}_٠ = \frac{\sum س_i^٠}{ن}$$

$$(٢) \text{ العزم الرائي حول الوسط الحسابي } = \bar{ع}_١ = \frac{\sum (س_i - \bar{س})}{ن}$$

$$(٣) \text{ العزم الرائي حول العدد } أ = \bar{ع}_١ = \frac{\sum (س_i - أ)}{ن}$$

حيث ر = ١، ٢، ٣، ...

مثال (٢٦) : إليك القيم التالية: (٢، ٣، ١٠، ١، ٦).

أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر ثم حول الوسط الحسابي ومن ثم

أوجد ع_١، ع_٢، ع_٣، ع_٤.

الحل:

$$(١) \bar{ع}_٠ = \frac{\sum س_i^٠}{ن} = \frac{٦+١+١٠+٣+٢}{٥} = \frac{٢٢}{٥} = ٤,٤$$

$$(٢) \bar{ع}_١ = \frac{\sum (س_i - \bar{س})}{ن} = \frac{٢(٦)+١(١)+١٠(١٠)+٣(٣)+٢(٢)}{٥} = \frac{١٥٠}{٥} = ٣٠$$

$$(٣) \bar{ع}_٢ = \frac{\sum (س_i - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٢(٦)^٢+١(١)^٢+١٠(١٠)^٢+٣(٣)^٢+٢(٢)^٢}{٥} = \frac{١٢٥٢}{٥} = ٢٥٠,٤$$

$$(٤) \bar{ع}_٣ = \frac{\sum (س_i - \bar{س})^٣}{ن} = \frac{٢(٦)^٣+١(١)^٣+١٠(١٠)^٣+٣(٣)^٣+٢(٢)^٣}{٥} = \frac{١١٣٩٤}{٥} = ٢٢٧٨,٨$$

$$\frac{(\xi, \xi - 6) + (\xi, \xi - 1) + (\xi, \xi - 10) + (\xi, \xi - 3) + (\xi, \xi - 2)}{0} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \sum}{\text{ن}} = {}_1\text{ع} \quad (5)$$

$$\frac{{}^1(\xi, \xi - 6) + {}^1(\xi, \xi - 1) + {}^1(\xi, \xi - 10) + {}^1(\xi, \xi - 3) + {}^1(\xi, \xi - 2)}{0} = \frac{{}^1\left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \sum}{\text{ن}} = {}_1\text{ع} \quad (6)$$

$$10,74 = \frac{03,2}{0} =$$

$$\frac{{}^2(\xi, \xi - 6) + {}^2(\xi, \xi - 1) + {}^2(\xi, \xi - 10) + {}^2(\xi, \xi - 3) + {}^2(\xi, \xi - 2)}{0} = \frac{{}^2\left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \sum}{\text{ن}} = {}_2\text{ع} \quad (7)$$

$$24,78 = \frac{13,84}{0} =$$

$$\frac{{}^4(\xi, \xi - 6) + {}^4(\xi, \xi - 1) + {}^4(\xi, \xi - 10) + {}^4(\xi, \xi - 3) + {}^4(\xi, \xi - 2)}{0} = \frac{{}^4\left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \sum}{\text{ن}} = {}_4\text{ع} \quad (8)$$

$$33,132 = \frac{110,706}{0} =$$

$${}_0\xi = \frac{2}{0} = \frac{(\xi - 6) + (\xi - 1) + (\xi - 10) + (\xi - 3) + (\xi - 2)}{0} = ({}_0\xi) \quad (9)$$

$$\xi 2 = \frac{210}{0} = \frac{{}^1(10 - 6) + {}^1(10 - 1) + {}^1(10 - 10) + {}^1(10 - 3) + {}^1(10 - 2)}{0} = (10) {}_1\text{ع} \quad (10)$$

تعريف (٢): في حالة المشاهدات المتكررة:

ليكن لدينا المشاهدات س، س، ...، س والتكرارات المقابلة ك، ك، ...، ك،

لن فيمكن تعريف العزم الرائي على النحو التالي:

$$\frac{\sum \text{س} \cdot \text{ك}}{\sum \text{ك}} = \text{ع} \quad (1) \text{ العزم الرائي حول الصفر}$$

$$\frac{\sum \left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \cdot \text{ك}}{\sum \text{ك}} = \text{ع} \quad (2) \text{ العزم الرائي حول الوسط الحسابي}$$

$$\dots, \alpha, 1 = \text{ر} \quad \text{حيث } \frac{\sum \left(\begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س}^- \end{smallmatrix} \right) \cdot \text{ك}}{\sum \text{ك}} = (1) \text{ع} \quad (3) \text{ العزم الرائي حول العدد 1}$$

تعريف (٣) في حالة المشاهدات المبوية (الجداول التكرارية):

ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته s_1, \dots, s_m والتكرارات المقابلة هي t_1, \dots, t_m ، تم فيمكن تعريف العزوم الرائية على النحو:

$$(١) \text{ العزم الرائي حول الصفر } = \bar{G}_r = \frac{\sum s_r t_r}{\sum t_r}$$

$$(٢) \text{ العزم الرائي حول الوسط الحسابي } = \bar{G}_c = \frac{\sum (s_r - \bar{s}) t_r}{\sum t_r}$$

$$(٣) \text{ العزم الرائي حول العدد } A = \bar{G}_A = \frac{\sum (s_r - A) t_r}{\sum t_r}$$

ملاحظات:

- (١) إذا كانت $r = 1$ فإن $\bar{G}_1 = \bar{s}$
- أي أن العزم الأول حول الصفر يساوي الوسط الحسابي.
- (٢) إذا كانت $r = 1$ فإن $\bar{G}_1 = \bar{s}$ = صفر.
- أي أن العزم الأول حول الوسط الحسابي يساوي صفر.
- (٣) إذا كانت $r = 2$ فإن $\bar{G}_2 = \bar{s}^2$ = التباين.
- أي أن العزم الثاني حول الوسط الحسابي يساوي التباين.
- (٤) يمكن كتابة العزوم الرائية حول الوسط الحسابي بدلالة العزوم حول الصفر على النحو التالي:

$$(أ) \text{ إذا كانت } r = 2 \text{ فإن } \bar{G}_2 = \bar{s}^2 - \frac{\sum s_r^2 t_r}{\sum t_r} = \bar{s}^2 - \frac{\sum s_r^2 t_r}{n}$$

$$\bar{G}_2 = \bar{s}^2 - \bar{s}^2$$

$$(ب) \text{ إذا كانت } r = 3 \text{ فإن } \bar{G}_3 = \bar{s}^3 - \frac{\sum (s_r - \bar{s})^3 t_r}{\sum t_r} = \bar{s}^3 - \frac{\sum s_r^3 t_r}{n} + \frac{\sum s_r^2 t_r}{n} - \frac{\sum s_r t_r}{n} + \bar{s}^3$$

$$\bar{G}_3 = \bar{s}^3 - \bar{s}^3 + \bar{s}^3 - \bar{s}^3 + \bar{s}^3 = \bar{s}^3$$

$$\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن} = \text{إذا كانت } ر = ٤ \text{ فإن } ع = ٣$$

$$\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن} = ع \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum س^2}{ن} - \frac{(\sum س)^2}{ن} = ع$$

$$ع = ٤ - ع_١ - ع_٢ - ع_٣ - ع_٤ - ع_٥ - ع_٦ - ع_٧ - ع_٨$$

مثال (٧)، إليك الجدول التالي الذي يبين أوزان مئة طفل.

الوزن (س)	٦	٦,٥	٧	٧,٥	٨	المجموع
عدد الأطفال (ك)	٢٠	١٠	٢٠	٣٠	٢٠	١٠٠

أوجد: (١) $\bar{ع}$ ، (٢) $\bar{ع}^2$ ، (٣) $\bar{ع}^3$ ، (٤) $\bar{ع}^4$ ، (٥) $\bar{ع}^5$ ، (٦) $\bar{ع}^6$ ، (٧) $\bar{ع}^7$ ، (٨) $\bar{ع}^8$ ، (٩) $\bar{ع}^9$ ، (١٠) $\bar{ع}^{10}$.

س	ك	س. ك	س ^٢ . ك	س ^٣ . ك	س ^٤ . ك	س ^٥ . ك	س ^٦ . ك	س ^٧ . ك	س ^٨ . ك	س ^٩ . ك	س ^{١٠} . ك
٦	٢٠	١٢٠	٧٢٠	٤٣٢٠	٢٥٩٢٠	١٥٥٥٢٠	٩٣٣١٢٠	٥٥٩٨٤٠	٣٣٥٩٠٤٠	٢٠١٥٤٢٤٠	١٢٠٩٨٥٦٠
٦,٥	١٠	٦٥	٤٢٢,٥	٢٧٤٦,٢٥	١٧٨٥٠,٦٢٥	١١٨١٢٥,٦٢٥	٧٦٨١٢٥,٦٢٥	٥٠٩٨٤٠,٦٢٥	٣٣٥٩٠٤٠,٦٢٥	٢٠١٥٤٢٤٠,٦٢٥	١٢٠٩٨٥٦٠,٦٢٥
٧	٢٠	١٤٠	٩٨٠	٦٨٦٠	٤٨٠٢٠	٣٣٢٦٢٠	٢٣٢٦٢٠	١٦٢٦٢٠	١١٢٦٢٠	٧٦٨١٢٠	٥٠٩٨٤٠
٧,٥	٣٠	٢٢٥	١٦٨٧,٥	١٢٦٥٦,٢٥	٩٤٩٣١,٨٧٥	٧١١٩٦٦,٢٥	٥٣٣٩٧٤,٣٧٥	٣٩٩٤٤٠,٦٢٥	٢٩٩٤٤٠,٦٢٥	٢٢٢٢٢٠,٦٢٥	١٦٦٦٦٠,٦٢٥
٨	٢٠	١٦٠	١٢٨٠	١٠٢٤٠	٨١٩٢٠	٦٥٥٢٠	٥١٦٠	٤١٢٠	٣٢٨٠	٢٥٦٠	٢٠٤٠
المجموع	١٠٠	٧١٠	٥٠٩٠	٣٨١٢٢,٥	٢٣٨١٢٢,٥	١٦٦٦٢٢,٥	١١٢٦٢٢,٥	٧٦٨١٢٢,٥	٥٠٩٨٤٢,٥	٣٣٥٩٠٤٢,٥	٢٠١٥٤٢٤٢,٥

الحل:

$$\bar{ع}_١ = \frac{٧١٠}{١٠٠} = ٧,١$$

$$\bar{ع}_٢ = \frac{\sum س. ك}{\sum ك} = \frac{٥٠٩٠}{١٠٠} = ٥٠,٩$$

$$\bar{x} = \frac{381,220}{100} = 3,812,20 \quad (3)$$

$$\bar{x} = \frac{381,220}{100} = \frac{\sum x_k}{\sum k} = 3,812,20 \quad (4)$$

$$ع = صفر [حسب الملاحظة (1)] \quad (5)$$

$$ع = ع - ع - ع = 50,9 - 3,812,20 - 0,49 \quad (6)$$

$$ع = ع - ع - ع = 3,812,20 - 3 \times 3,812,20 + 3 \times 50,9 + 3 \times 0,49 = 3,812,20 - 3 \times 3,812,20 + 3 \times 50,9 + 3 \times 0,49 \quad (7)$$

$$ع = ع - ع - ع = 3,812,20 \times 7,1 \times 4 - 381,220 = 3,812,20 \times 7,1 \times 4 - 381,220 \quad (8)$$

$$ع = 3,812,20 \times 7,1 \times 4 - 381,220 = 3,812,20 \times 7,1 \times 4 - 381,220$$

$$ع = \frac{50}{100} = \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{\sum k} = 0,5 \quad (9)$$

(١٠-٤) الالتواء (The Skewness)

تعريف (١): يعرف الالتواء بأنه درجة التماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما.

استخداماته:

يستخدم الالتواء لمعرفة نوع التوزيع فإذا كان:

(أ) مقياس الالتواء موجباً فعندها نقول بأن التوزيع ملتو نحو اليمين (موجب الالتواء).

(ب) مقياس الالتواء سالباً فعندها نقول بأن التوزيع ملتو نحو اليسار (سالب الالتواء).

(ج) مقياس الالتواء يساوي الصفر فإن التوزيع متماثل.

تعريف (٢): مقياس الالتواء لمجموعة من البيانات أو لجدول تكراري كالتالي:

$$(أ) \text{ معامل بيرسون الأول للالتواء} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\sigma}} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\sigma}$$

$$3 (\text{الوسط} - \text{الوسيط})$$

$$\text{(ب) معامل بيرسون الثاني للالتواء} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\frac{(\bar{r} - r)^2}{\sigma}} =$$

$$\text{(ح) معامل الالتواء الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - 2 \times \text{الربيع الأوسط} + \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}} = \frac{r_2 - 2r_1 + r_3}{r_3 - r_1} =$$

$$\text{(د) معامل الالتواء المثلثي} = \frac{\text{المثلث التسعون} - 2 \times \text{المثلث الخمسون} + \text{المثلث العاشر}}{\text{المثلث التسعون} - \text{المثلث العاشر}} =$$

$$\text{(هـ) معامل الالتواء العزومي} = \frac{\text{العزم الثالث حول الوسط}}{\text{مكعب الانحراف المعياري}} = \frac{\frac{r_c}{\left(\frac{r_c}{\sigma}\right)^3}}{\frac{r_c}{\sigma}} =$$

مثال (٢٨)، الجدول التالي يبين فئات الأجر وإعداد العمل.

فئات الأجر	٥٩-٤٠	٧٩-٦٠	٩٩-٨٠	١١٩-١٠٠	١٣٩-١٢٠
عدد العمل	٨	١٢	٢٠	٨	٢

علماً بأن: $\bar{r} = ٨٣,٦$ و $r = ٨٥$ و $r_1 = ٦٧,٥$ و $r_2 = ٩٧,٥$ و $\sigma = ٢٠,٩٥$ و $m = ٨٨$

أوجد:

(١) معامل بيرسون الأول للالتواء.

(٢) معامل الالتواء الربيعي.

(٣) معامل بيرسون الثاني للالتواء.

الحل:

$$(١) \text{ معامل بيرسون الأول للالتواء} = \frac{\bar{X} - X_0}{\sigma} = \frac{٨٨ - ٨٣,٦}{٢٠,٩٥} = ٠,٢١ -$$

$$(٢) \text{ معامل بيرسون الثاني للالتواء} = \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{\sigma} = \frac{(٨٥ - ٨٣,٦)^2}{٢٠,٩٥} = ٠,٢٠ -$$

$$(٣) \text{ معامل الالتواء الربيعي} = \frac{X_1 + X_2 \times ٢ - X_3}{X_1 - X_3} = \frac{٦٧,٥ + ٨٥ \times ٢ - ٩٧,٥}{٦٧,٥ - ٩٧,٥} = ١,٢ -$$

$$٠,١٦٧ - = \frac{٥ -}{٣٠} = \frac{١٧٠ - ١٦٥}{٣٠} =$$

مثال (٢٩): بالرجوع إلى المثال (٢٧) احسب معامل الالتواء العزومي.

$$\text{الحل: بما أن } \bar{X} = ٠,١٢٣ - \text{ و } \sigma = ٠,٤٩ -$$

فإن:

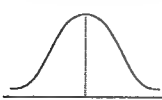
$$\text{معامل الالتواء العزومي} = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{\bar{X}}}} = \frac{٠,١٢٣ -}{\sqrt{\frac{٠,٤٩}{٠,٤٩}}} = ٠,٣٥٨ -$$

وهذا يعني بأن التوزيع ملتوي نحو اليسار (سالب الالتواء).

(٤-١١): التفرطح (The Kurtosis):

تعريف (١): التفرطح هو درجة تدبب قمة التوزيع قياساً إلى التوزيع الطبيعي.

فالتوزيع ذو القمة العالية نسبياً كما في الشكل (١) يسمى منحني مدبب، والتوزيع الذي قمته مسطحة كما في الشكل (٢) يسمى مفطحاً والتوزيع الطبيعي في الشكل (٣) حيث قمته ليست مدببة ولا مفطحة يسمى متوسط التفرطح.



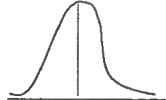
معتدل

الشكل (٣)



مفطح

الشكل (٢)



مدبب

الشكل (١)

تعريف (٢): يعرف مقياس التفرطح لمجموعة من البيانات أو لجدول تكراري كالاتي:

العزم الرابع حول الوسط الحسابي العزم الرابع حول الوسط

$$\frac{\text{مربع العزم الثاني حول الوسط}}{\text{مربع التباين}} = \frac{\text{مربع العزم الرابع حول الوسط}}{\text{مربع العزم الثاني حول الوسط}} = \alpha^2$$

$$\frac{\frac{1}{1} \bar{x}}{\frac{1}{1} \sigma} = \frac{\frac{1}{1} \bar{x}}{\frac{1}{1} \sigma} = \alpha \Leftarrow$$

$$\left(\frac{\text{الربيع الأعلى - الربيع الأدنى}}{\text{المئين التسعون - المئين العاشر}} \right) = \frac{1}{2} = k = \text{معامل التفرطح المئيني}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}$$

ملاحظات:

- (١) إذا كانت $\alpha = 3$ فإن التوزيع معتدل.
 - (٢) إذا كانت α أكبر من ٣ فإن التوزيع مدبب.
 - (٣) إذا كانت α أقل من ٣ فإن التوزيع مفرطح.
 - (٤) إذا كانت $k = 0,263$ فالتوزيع معتدل.
 - (٥) إذا كانت k أكبر من ٠,٢٦٣ فالتوزيع مدبب.
 - (٦) إذا كانت k أقل من ٠,٢٦٣ فالتوزيع مفرطح.
- مثال (٣٠): بالرجوع إلى المثال رقم (٢٧) احسب معامل التفرطح العزومي واذكر نوع التوزيع.

الحل: حيث أن: $\bar{x} = 0,445$ ، $\sigma = 0,49$.

$$\text{فإن: } \alpha = \frac{\frac{1}{1} \bar{x}}{\frac{1}{1} \sigma} = \frac{0,445}{0,49} = 0,908$$

وبما إن α أقل من ٣ فإن التوزيع مفرطح.

(٤-١٢) مسائل محلولة:

مسألة (١)، إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي $\sqrt{50}$ وكان مجموع مربع القيم = ٤٥٠٠ والوسط الحسابي لهذه القيم يساوي = ٢٠. أوجد عدد القيم.

الحل:

$$\text{بما أن } \sigma = \sqrt{50}, \quad \sum x^2 = 4500, \quad \bar{x} = 20.$$

فإنه باستخدام العلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{ينتج:}$$

$$50 = \frac{4500}{n} - (20)^2$$

$$50 = \frac{4500}{n} - 400 \Rightarrow \frac{4500}{n} = 450 \Rightarrow n = \frac{4500}{450} = 10$$

مسألة (٢)، إليك الجدول التالي الذي يبين الأجرة الأسبوعية لخمسين عمالاً في مصنع.

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩	المجموع
التكرار	٥	٢٠	١٧	٨	٥٠

أوجد: (أ) الانحراف المتوسط (ب) الانحراف المعياري

(ج) التباين (د) نصف المدى الربيعي (هـ) المدى

(و) النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$

الحل:

الفئات	ت	س	س ^٢ × ت	(س - \bar{x})	(س - \bar{x}) ^٢	(س - \bar{x}) × ت	(س - \bar{x}) ^٣ × ت
٣٤-٣٠	٥	٣٢	١٦٠	-٧,٨	٦٠,٨٤	-٣٩	-٣٠٤,٢
٣٩-٣٥	٢٠	٣٧	٧٤٠	-٢,٨	٧,٨٤	-٥٦	-١٥٦,٨
٤٤-٤٠	١٧	٤٢	٧١٤	٢,٢	٤,٨٤	٣٧,٤	٨٢,٢٨
٤٩-٤٥	٨	٤٧	٣٧٦	٧,٢	٥١,٨٤	٥٧,٦	٤١٤,٧٢
المجموع	٥٠		١٩٩٠			١٩٠	٩٥٨

$$\bar{x} = \frac{1990}{50} = 39.8$$

$$1 - \text{الانحراف المتوسط} = \mu = \frac{190}{50} = 3.8$$

$$2 - \text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{958}{50}} = 4.38$$

$$3 - \text{التباين} = \sigma^2 = (4.38)^2 = 19.16$$

-٤-

الفتات	ت ر	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٢٩-٢٥	صفر	٢٩,٥	صفر
٣٤-٣٠	٥	٣٤,٥	٥
٣٩-٣٥	٢٠	٣٩,٥	٢٥
٤٤-٤٠	١٧	٤٤,٥	٤٢
٤٩-٤٥	٩	٤٩,٥	٥٠

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\text{رتبة } M_0 = 50 \times \frac{70}{100} = 35,0$$

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{c} 17 \\ \left[\begin{array}{c} \rightarrow 12,0 \\ \leftarrow 42 \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{c} 25 \\ 37,0 \\ 42 \end{array} & \leftarrow & \left. \begin{array}{c} 39,0 \\ 30 \\ 44,0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 5 \\ 20 \\ 37 \end{array} \end{array}$$

$$43,18 = 50 \times \frac{12,0}{17} + 39,0 = M_0 \quad \diamond$$

$$\Leftarrow \text{رتبة } M_0 = 50 \times \frac{70}{100} = 35,0$$

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{c} 20 \\ \left[\begin{array}{c} \rightarrow 7,0 \\ \leftarrow 20 \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{c} 0 \\ 12,0 \\ 20 \end{array} & \leftarrow & \left. \begin{array}{c} 34,0 \\ 30 \\ 39,0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 5 \\ 20 \\ 37 \end{array} \end{array}$$

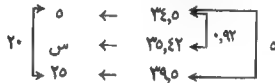
$$٣٦,٣٧٥ = ١,٨٧٥ + ٣٤,٥ = ٥ \times \frac{٧,٥}{٢٠} + ٣٤,٥ = ٢٥ \text{ م} \quad \diamond$$

$$\text{وبالتالي} = \text{نصف الملى الربيعي} = ر = \frac{٣٦,٣٧٥ - ٤٣,١٨}{٧}$$

$$\begin{aligned} ٥ - \text{الملى} &= \text{الحد الأعلى الفعلي للفترة الأخيرة} - \text{الحد الأدنى للفترة الأولى} \\ ٢٠ &= ٢٩,٥ - ٤٩,٥ = \end{aligned}$$

٦- النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة $(\bar{\sigma} - \sigma, \bar{\sigma} + \sigma)$ ، النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة $(٤,٣٨ - ٣٩,٨, ٤,٣٨ + ٣٩,٨) = (٣٥,٤٢, ٤٤,١٨)$.

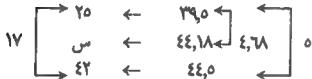
الآن: نجد الرتبة المئينية للملاحظة (٣٥,٤٢).



$$\diamond \text{ م} = ٥ + ٢٠ \times \frac{٠,٩٢}{٥} = ٨,٦٨$$

$$\text{الرتبة المئينية للملاحظة (٣٥,٤٢)} = ٨,٦٨ \times \frac{١٠٠}{٥} = ١٧٧,٣٦$$

نجد الرتبة المئينية للملاحظة (٤٤,١٨).



$$\text{م} = ٢٥ + ١٧ \times \frac{٤,٦٨}{٥}$$

$$= ١٥,٩١٢ + ٢٥ = ٤٠,٩١٢$$

$$\text{الرتبة المئينية} = \frac{٤٠,٩١٢}{٥} \times ١٠٠ = ٤٠٩,١٢٤ = \text{وبالتالي النسبة المئوية للعمل}$$

$$\text{ضمن هذه الفترة} = ٤٠٩,١٢٤ - ١٧٧,٣٦ = ٢٣١,٧٦٤ \%$$

الحل:

$$\frac{\sqrt{{}^1(١) + {}^1(٦) + {}^1(٧) + {}^1(٢) + {}^1(٥) + {}^1(٤)}}{٦} = \frac{\sqrt{{}^1(٢٠) - ٢٠}}{٢} = \sigma = \text{الانحراف المعياري}$$

$$\frac{\sqrt{١٢٠}}{٦} = \frac{\sqrt{٠ + ٣٦ + ٤٩ + ٤ + ٢٥ + ١٦}}{٦} =$$

$$٤,٦٥٥ = \sqrt{٢١,٢٧} =$$

$$\frac{|+١٦-| + |٧+|٢-| + |٥+|٤-|}{٦} = \frac{|٢٠-|}{٢} = \text{م.ح} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$\xi = \frac{٢٤}{٦} = \frac{٠ + ٦ + ٧ + ٢ + ٥ + ٤}{٦} =$$

مسألة (٦): إليك المعطيات التالية:

$$\sum {}^1 = ٨٥٠٠ \quad \text{ن} = ٢٠, \quad \sigma = ٥$$

أوجد:

(أ) الوسط الحسابي.

(ب) مجموع مربعات الانحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

(ج) مجموع مربعات القيم عن القيمة (١٨).

(د) إذا عدلت القيم حسب العلاقة:

$$\text{ص} = ٢ - \text{س}$$

$$\sum (ص - \bar{ص})^2 \quad \text{أوجد كلاً من } \bar{ص}, \sigma^2, \text{ و } \sum (ص - \bar{ص})^2$$

الحل:

$$(أ) \text{ باستخدام العلاقة } \sigma^2 = \frac{\sum {}^1}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^2$$

$$\Leftarrow \bar{\text{س}}^2 = \frac{٨٥٠٠}{٢٠} - (٥)^2 = ٤٢٥ - ٢٥ = ٤٠٠$$

$$\bar{y}_0 = \bar{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n} = \sigma^2 \text{ (ب) باستخدام العلاقة}$$

$$\Leftrightarrow \sum (y - \bar{y})^2 = \sigma^2 \times n = 20 \times 20 = 400$$

$$\text{(ج) لتكن } x = y - \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum x}{n} + \bar{y}$$

$$20 = \bar{y} = \frac{\sum x}{20} + 18$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n} \right)^2$$

$$20 = \frac{\sum x^2}{20} - \left(\frac{\sum x}{20} \right)^2 = 20$$

$$\therefore \sum x^2 = 400$$

$$\text{(د) } \bar{y}_0 = \bar{y} = 18 - 20 \times 2 = 18 - 40 = -22$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (y - \bar{y}_0)^2}{n} = \frac{\sum (y - (-22))^2}{n} = \frac{\sum (y + 22)^2}{n}$$

$$2000 = \frac{\sum (y + 22)^2}{n} = \frac{\sum (y - (-22))^2}{n} = \frac{\sum (y - \bar{y}_0)^2}{n}$$

تمارين الوحدة الرابعة

س١: للمشاهدات التالية: -٧، ٥، ٢، ٠، ١، ٨ احسب ما يلي:

(١) المدى (٢) الانحراف المتوسط (٣) الانحراف المعياري (٤) التباين.

س٢: للقيم التالية: ٣، ٤، ٥، ٦، ١٧، ١٢، ١٤، ١١، ١٢، ١٤ احسب ما يلي:

(١) المدى (٢) الانحراف المتوسط (٣) الانحراف المعياري (٤) التباين.

س٣: إليك البيانات التالية التي تمثل علامات (٣٠) طالب في امتحان ما .

٢٨	٢١	٣٣	٢٤	١٥	٣٣
٢٧	٢٢	٢٤	١٥	١٧	٢٤
١٧	٢٤	١٩	٣٧	١٩	٣٦
١٥	٢٥	٢٠	٢٨	٢٠	٢٥
٢٠	٢٧	١٦	٢٩	٢٤	٣٣

المطلوب:

(أ) ضع هذه البيانات في جدول تكراري عدد فئاته (٦).

(ب) أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات.

(ج) أوجد الانحراف المعياري للجدول.

(د) قارن بين الإجابتين في (ب) و (ج)

(هـ) أوجد النسبة المئوية للعلامات ضمن الفترة $(\sigma - \sigma)$ ، $(\sigma + \sigma)$.

س٤: الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري التي حصل عليها الطلبة في الكلية في مساق الإحصاء في الترتيب.

العلامات	٣٩-٣٠	٤٩-٤٠	٥٩-٥٠	٦٩-٦٠	٧٩-٨٠	٨٩-٨٠	٩٩-٩٠	المجموع
عدد الأشخاص	١	٣	١١	٢١	٤٣	٣٢	٩	١٢٠

أوجد ما يلي:

- ١- الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.
 - ٢- الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.
 - ٣- الانحراف المتوسط.
 - ٤- التباين.
 - ٥- نصف المدى الربيعي.
 - ٦- عدد الطلبة ضمن الفترة $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$.
 - ٧- معامل الاختلاف النسبي.
- س٥: الجدول التالي يبين أوزان (٥٠) شخص.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠	المجموع
عدد الأشخاص	٣	٧	١٥	١٠	١٠	٥	٥٠

احسب ما يلي:

- ١- الانحراف المتوسط ٢- الانحراف المعياري.
- س٦: إذا كانت المحرفات خمسة قيم عن وسطها الفرضي هي: ١٣، ١٢، -١٤، -١٢، وكان التباين لهذه القيم يساوي ٢٥ أوجد قيمة أ.
- س٧: إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي = ٣٠ والانحراف المعياري يساوي (٥) وعدلت هذه المشاهدات وفق المعادلة: $x = 50 - \frac{1}{4}x$ أوجد الوسط والانحراف بعد التعديل.

س٨: إذا كان لدينا بيانات فيها:

$$\bar{x} = 8, \quad s^2 = 200, \quad n = 10 \quad \text{أوجد } \bar{x}^2$$

س٩: أخلت عيتان من مجتمعين مستقلين عن بعضها البعض فأعطت النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\sum_{j=1}^{20} x_j = 450$	$\sum_{j=1}^{20} x_j = 100$
$\sum_{j=1}^{20} x_j^2 = 19000$	$\sum_{j=1}^{20} x_j^2 = 3500$

- ١- احسب الوسط الحسابي لكل عينة.
- ٢- دمج العيتان أحسب الوسط الحسابي الناتج عن الدمج.
- ٣- أوجد الانحراف المعياري لكل عينة.
- ٤- أوجد الانحراف المعياري الناتج عن دمج العيتان.
- ٥- احسب معامل الاختلاف لكل عينة، أي العيتان أكثر اختلافاً؟
- س١٠: إذا كانت $\sum_{j=1}^n x_j = 13000$ ، $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 5000$ ، وكان $\bar{x} = 100$ أوجد الانحراف المعياري .
- س١١: إذا كان المدى الربيعي لمجموعة من البيانات يساوي (٢٠) وكان الربيع الأعلى يساوي (٥٠) أوجد الربيع الأدنى.
- س١٢: إذا كان التباين لمجموعة بيانات يساوي ١٠ وكان عدد البيانات (٢٠) أوجد مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي.
- س١٣: إليك القيم التالية: (٦، ٣، ٨، ٩، ٥، ٧، ٤)
- (١) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر.
- (٢) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.
- (٣) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول العدد (٧).

س١٤. للمجدول التالي:

س١٤	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	٢٢	المجموع
ك١٤	١	٤	٦	١٠	٧	٢	٣٠

(أ) استخراج العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

(ب) احسب معامل التفرطح العزومي، معامل الالتواء العزومي.

س١٥. إذا كان العزم الثاني حول الوسط لتوزيعين هما ٩، ١٦ على الترتيب بينما العزم الثالث حول الوسط الحسابي يساوي ٩، ١٢، ٨ أي التوزيعين أكثر التواء لليسار.

س١٦. إذا كان العزوم الأربعة الأولى حول الرقم ٣ تساوي -٢، -١٠، -٢٥، ٥٠ أوجد العزوم المقابلة:

(١) حول الوسط.

(٢) حول الرقم ٥.

(٣) حول الصفر.

س١٧. إذا كان العزم الثاني حول الوسط يساوي (٧) والعزم الثالث يساوي (١٦) أوجد مقياس الالتواء العزومي واذكر نوع التوزيع.

س١٨. الجدول التالي يبين أجور ثلاثون عمالاً في مصنع بالدينار الأردني خلال أسبوع معين.

الأجور الأسبوعية	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	المجموع
عدد العمال	٩	٧	٦	٣	٥	٣٠

احسب ما يلي:

(أ) العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

(ب) العزوم الأربعة الأولى حول الصفر.

(جـ) العزم الثاني حول العدد (٣٠).

(د) معامل بيرسون الأول للالتواء.

(هـ) معامل بيرسون الثاني للالتواء.

(و) مقياس الالتواء الربيعي.

(ز) مقياس الالتواء المثنئي.

(ح) مقياس الالتواء العزومي.

(ط) مقياس التفرطح العزومي.

(ي) مقياس التفرطح المثنئي.

(ق) حدد نوع التوزيع من حيث الالتواء والتفرطح.

س١٩: بالاستفادة من السؤال (١٥) وإذا كان العزم الرابع حول الوسط لتوزيعين هما:

٧٨٠، ٣٣٠ على الترتيب أي التوزيعين أكثر تقريبا للتوزيع الطبيعي لو نظرنا

إلى:

(أ) تدبب القمة.

(ب) الالتواء.

س٢٠: عبر عن العزم الخامس حول الوسط الحسابي بدلالة العزوم حول الصفر.

الوحدة الخامسة

الارتباط والانحدار

Correlation & Regression

مقدمة

(١-٥) الارتباط

(٢-٥) معامل الارتباط بيرسون

(٣-٥) أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط

(٤-٥) معامل الارتباط للرتب

(٥-٥) تحليل الانحدار

(٦-٥) العلاقة بين معامل الارتباط بيرسون وبين معاملات

خطي الانحدار

(٧-٥) مسائل محلولة

(٨-٥) تمارين عامة على الوحدة

الارتباط والانحدار

Correlation & Regression

مقدمة:

في الوحدات السابقة تعرضنا للدراسة ظاهرة واحدة أو متغير واحد بمعزل عن العوامل الأخرى وأمکننا التوصل إلى مقاييس تعبّر عن هذه الظاهرة وأمثلة ذلك مقاييس النزعة المركزية والتشتت. وهذه المقاييس أساسية وهامة في التعرف على خصائص ومميزات أي ظاهرة. ومع هذا فإنها ليست كافية للحكم الدقيق على سلوك الظاهرة. ويرجع السبب في ذلك إلى أن أي ظاهرة لا تتغير بمعزل عن الظواهر الأخرى المحيطة والمربطة بها. لذلك فمن المنطقي أن الحكم على ظاهرة ما يجب أن يتم من خلال دراسة علاقتها بالظواهر الأخرى التي تؤثر بها أو تتأثر بها. وعملياً فمعظم الظواهر تكون سبباً ونتيجة. ففي حين تكون بعض الظواهر سبباً في التغيرات التي نلاحظها على ظاهرة أو ظواهر أخرى فإن البعض الآخر يكون نتيجة لهذه التغيرات لذلك فإنه من المقبول والمتوقع أن تلك الظواهر التي هي نتائج لظواهر أخرى قد تكون سبباً في التأثير على ظواهر مختلفة وهكذا، وهذا يخلص بنا إلى وجود علاقة بين أي ظاهرة والظواهر الأخرى. ودراسة هذه العلاقة تمكننا من القدرة على التنبؤ بتغيرات هذه الظاهرة من خلال التعرف على أثر العوامل الأخرى المؤثرة فيها. وتزداد دقة التنبؤ أو التوقع كلما كانت دراستنا شاملة لأكبر عدد من المؤثرات التي تؤخذ في الحسبان عند إجراء هذا التنبؤ. فمثلاً إذا رمزنا لظاهرة ما بالرمز ص وكانت المتغيرات أو العوامل الأخرى التي تؤثر عليها هي س، ... ، س_n فإننا نكتب ص = ق(س، ... ، س_n). أي أن ص هو متغير تابع ناتج لمحصلة التأثير عوامل أخرى هي س، ... ، س_n والتي تسمى متغيرات مستقلة. وأمثلة ذلك كثيرة في العلوم المختلفة، ففي المجال الاقتصادي نجد بأن الطلب على سلعة معينة تتأثر بعوامل عدة منها السعر لتلك السلعة، أسعار السلع البديلة، أسعار السلع المكملة، دخل

المستهلكه المستوى التعليمي، الجنس، السن، الخ.

وفي المجال الزراعي نجد أن إنتاج محصول معين نتيجة تأثير عوامل عدة منها أنواع البذور المستخدمة، سعر البذور، الأسمدة المستخدمة، طريقة الزراعة، كمية المياه وحالة الجو، المساحة المزروعة، كمية العمالة المستخدمة الخ.

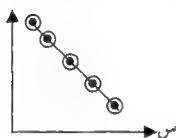
وفي المجال الصحي أيضاً نجد أن الإصابة بمرض معين يمكن أن تكون نتيجة لعدة أسباب نذكر منها التاريخ الوراثي لهذا المرض في العائلة، الحالة الاجتماعية، المعيشة للفرد، التعرض لأحد العوامل التي تؤدي للإصابة بهذا المرض كالجو غير النقي والمياه الغير النقية والأطعمة غير الصحية وهكذا. وبما سبق يمكن أن نستخلص أن هناك علاقة سببية بين ظاهرة ما من ناحية، وبين ظاهرة أو عدة ظواهر من ناحية أخرى وكيفية دراسة هذه العلاقة السببية هو أحد الأساليب الإحصائية التي يرجع الفضل فيها إلى السير فرانسيس جالتون "Sir Francis Galton" حيث حاول دراسة العلاقة بين أطوال مجموعة من الآباء وبين متوسط أطوال أبنائهم. وقد وجد إلى أن أبناء الآباء طويلي القامة ليسوا بنفس درجة طول آبائهم وأيضاً أن الأبناء قصيري القامة ليسوا بنفس درجة قصر آبائهم ومن ذلك استنتج أن أطوال الأبناء تعود أو تنحدر لمتوسط الطول للجنس البشري ومن هذه الدراسة أطلق لفظ الانحدار (Regression) ليفيد الدراسة الإحصائية للعلاقة السببية بين المتغيرات.

ومن ناحية أخرى فإن دراسة العلاقة بين المتغيرات يمكن أن تقتصر على تحديد مدى وجود علاقة بين المتغيرات، فإذا وجدت هذه العلاقة فهل هي قوية أم ضعيفة وهل هي طردية أم عكسية وهذا الحد من النتائج يعبر عنه الارتباط. إذا يهتم الانحدار بدراسة العلاقة السببية بين المتغيرات، بينما يهتم الارتباط بدراسة مدى وجود العلاقة بين المتغيرات من حيث القوة والاتجاه. ومن الطبيعي أن يكون هنالك علاقة بين الارتباط والانحدار طالما أنهما يهدفان للوصول إلى التعرف على العلاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة.

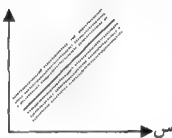
(١-٥) الارتباط: Correlation

لقد ذكرنا آنفاً أن الارتباط هو ذلك الأسلوب الذي يفسر درجة قوة واتجاه العلاقة بين المتغيرين س، ص دون النظر إلى السببية بينهما. فقد يرتبط هذين

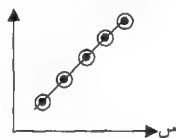
المتغيرين بعلاقة خطية أو غير خطية وقد لا تكون بينهما أي علاقة على وجه الإطلاق. فمثلاً لا يتوقع أن تكون هنالك علاقة بين طول الفرد (س) وعمر والده (ص) بينما يتوقع أن تكون هنالك علاقة بين طول الفرد (س) ووزنه (ص) ويستخدم أشكال الانتشار (Scatter Diagram) لإعطاء فكرة مبدئية عن شكل واتجاه العلاقة بين هذين المتغيرين، إن وجدت. فإذا كان لدينا عدد (ن) من الأزواج المرتبة للملاحظات (س، ص)، ...، (س_ن، ص_ن) للمتغيرين س، ص واستخدمنا المحور الأفقي ليمثل المتغير (س) والمحور الرأسي ليمثل المتغير (ص) فإن رصد أزواج المشاهدات على هذين المحورين يعطي العديد من أشكال الانتشار نذكر منها ما يلي:



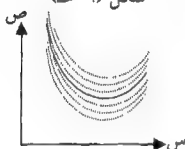
شكل (أ-١)



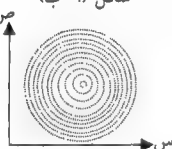
شكل (ب-١)



شكل (ج-١)



شكل (د-١)



شكل (هـ-١)



شكل (و-١)

فلاحظ بأن الشكل (ب-١) يبين أن الزيادة في أحد المتغيرين تصاحبها زيادة في المتغير الآخر وأن النقص في أحدهما يصاحبه نقص في الآخر. ومثل هذه العلاقة توصف بأنها علاقة طردية (موجبة) ومن ناحية أخرى فإن شكل (د-١) يبين أن الزيادة في أحد المتغيرين يصاحبها نقص في المتغير الآخر حيث أن العلاقة توصف بينهما بأنها علاقة عكسية (سالبة). والجدير بالذكر أن قوة العلاقة بين المتغيرين س، ص تزداد كلما زاد عدد النقط التي تقع على الخط الذي يمثل هذه العلاقة بينما تقل قوتها كلما قل عدد النقط التي تقع على الخط فإذا وقعت جميع أزواج المشاهدات

على نفس الخط توصف العلاقة بأنها علاقة تامة حيث يمكن تمثيلها بمعادلة رياضية. فالشكل (١-أ) يبين أن العلاقة بين س، ص علاقة خطية (موجبة) تامة بينما شكل (١-ح) يبين وجود علاقة خطية عكسية (سالبة) تامة.

والأشكال الأربعة الأولى تبين أن العلاقة بين المتغيرين س، ص خطية بينما الشكل (١-و) يعتبر أحد الأمثلة لوجود علاقة غير خطية (من الدرجة الثانية) بينهما. أما شكل (١-هـ) فيدل على عدم وجود أي علاقة بين س، ص حيث تنتشر النقاط بطريقة عشوائية تقريباً.

وكما سبق وأن ذكرنا فإن أشكال الانتشار يعطي فكرة مبدئية عن شكل ودرجة قوة العلاقة (إن وجدت) بين المتغيرين. س، ص فإذا تبين من شكل الانتشار وجود علاقة بينهما فإن قياس درجة قوتها رقمياً تنسم عن طريق حساب معامل الارتباط المناسب لنوعية البيانات المتاحة من هذين المتغيرين. وفيما يلي نستعرض بعض مقاييس الارتباط للبيانات الكمية والوصفية.

(٢-٥) معامل الارتباط بيرسون: (Pearson's Correlation Coefficient)

تعريف: ليكن لدينا مجموعة من أزواج المشاهدات (س_١، ص_١)، ...، (س_ن، ص_ن) فإن معامل الارتباط بيرسون يعطى بإحدى الصيغ التالية:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2 \sum_{i=1}^n (ص_i - \bar{ص})^2}} \quad (١)$$

حيث ن: عدد الأزواج المرتبة.

σ_s : الانحراف المعياري للمتغير س.

σ_v : الانحراف المعياري للمتغير ص.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n س_i ص_i - \frac{(\sum_{i=1}^n س_i)(\sum_{i=1}^n ص_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n س_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n س_i)^2}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n ص_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n ص_i)^2}{n} \right)}} \quad (٢)$$

$$(٣) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \bar{x}_{ij} - n \bar{x} \bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - n \bar{y}^2 \right)} = r$$

$$(٤) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} - n \bar{x} \bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - n \bar{y}^2 \right)} = r$$

خواص معامل الارتباط:

- ١- يعتبر معامل الارتباط (ر) قيمة مجردة لا تتأثر بوحدة المتغيرات.
- ٢- تتراوح قيمة (ر) بين -١، ١ أي أن $-1 \leq r \leq 1$.
- ٣- إذا كانت $r = 1$ فيقال بأن هنالك ارتباط طردي (موجب) تام.
- ٤- إذا كانت $r = -1$ فيقال بأن هنالك ارتباط عكسي (سالب) تام.
- ٥- إذا كانت قيمة r تتراوح بين الصفر والواحد فإنه يقال أن هنالك ارتباط طردي يكون ضعيفاً كلما كانت قيمة (ر) قريبة من الصفر وتزداد قوة العلاقة كلما اقتربنا من الواحد.
- ٦- إذا كانت قيمة r تتراوح بين -١، والصفر فيقال بأن هنالك ارتباط عكسي يكون قوياً كلما كانت قيمة r قريبة من -١ وتضعف كلما اقتربت من الصفر.
- ٧- إذا كانت $r = 0$ صفر فلا يوجد علاقة خطية بين المتغيرين.

مثال (١)، الجدول التالي يبين علامات عشرة طلاب في مبحثي الرياضيات والإحصاء.

المطلوب احسب معامل الارتباط بيرسون.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
الرياضيات (س)	٦٧	٨٤	٧٥	٩١	٩٢	٩٦	٩٠	٥١	٦٠	٥٤	٧٦٠
الإحصاء (ص)	٧٣	٧٤	٧٨	٨٦	٩٠	٩٨	٩٤	٦٥	٥٥	٦٧	٧٨٠

$$\text{الحل: } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{760}{10} = 76 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{780}{10} = 78$$

رقم الطالب	س	ص	س - ص	ص - ص	(س - ص) (ص - ص)	(س - ص)	(ص - ص)
١	٦٧	٧٣	٩-	٥-	٤٥	٨١	٢٥
٢	٨٤	٧٤	٨	٤-	٢٢-	٦٤	١٦
٣	٧٥	٧٨	١-	صفر	صفر	١	٠
٤	٩١	٨٦	١٥	٨	١٢٠	٢٢٥	٦٤
٥	٩٢	٩٠	١٦	١٢	١٩٢	٢٥٦	١٤٤
٦	٩٦	٩٨	٢٠	٢٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠
٧	٩٠	٩٤	١٤	١٦	٢٢٤	١٩٦	٢٥٦
٨	٥١	٦٥	٢٥-	١٣-	٣٢٥	٦٢٥	١٦٩
٩	٦٠	٥٥	١٦-	٢٣-	٣٦٨	٢٥٦	٥٢٩
١٠	٥٤	٦٧	٢٢-	١١-	٢٤٢	٤٨٤	١٢١
المجموع	٦٦٠	٧٨٠	صفر	صفر	١٨٨٤	٢٥٨٨	١٧٢٤

$$\therefore r = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum (س - ص)(ص - ص)}{\sigma_{س} \sigma_{ص}} = \frac{1}{10} \times \frac{1884}{\frac{1724}{10} \times \frac{2588}{10}}$$

$$= -0.8919$$

مثال (٢): إليك المعطيات التالية:

$$n = 10, \sum س = 160, \sum ص = 190, \sum س^2 = 4960, \sum ص^2 = 710.$$

$$\sum س ص = 4000. \text{ احسب معامل الارتباط بيرسون.}$$

الحل:

$$r = \frac{\sum س ص - \frac{\sum س \sum ص}{n}}{\sqrt{\left(\sum س^2 - \frac{(\sum س)^2}{n} \right) \left(\sum ص^2 - \frac{(\sum ص)^2}{n} \right)}} = \frac{4000 - \frac{160 \times 190}{10}}{\sqrt{[190 \times 190 - 710 \times 10][160 \times 160 - 4960 \times 10]}}$$

$$0,3098 = \frac{9100}{91000000} = \frac{30400 - 40000}{\sqrt{(40000)(24000)}} =$$

(٣-٥) أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط:

تعريف: ليكن لدينا أزواج المشاهدات التالية (س، ص)، ... ، (س، ص) وأجرينا التحويلات التالية:

$$س^* = س + ب$$

$$ص^* = ص - د$$

حيث أ، ب، ح، د أعداد حقيقية، (س، ص) زوج المشاهدات قبل التحويل، (س^{*}، ص^{*}) زوج المشاهدات بعد التحويل.

فإن: (١) معامل الارتباط بعد التحويل = ر (س^{*}، ص^{*}).

$$= ر (س، ص) \text{ إذا كانت أ، ح} < \text{صفر.}$$

أي أن معامل الارتباط يبقى كما هو إذا كانت أ و ح لهما نفس الإشارة.

$$(٢) \text{ معامل الارتباط بعد التحويل} = ر (س^*, ص^*)$$

$$= -ر (س، ص) \text{ إذا كانت أ، ح} > \text{صفر.}$$

أي أن معامل الارتباط تتغير إشارته فقط إذا كان أ و ح مختلفتان في الإشارة.

مثال (٣): حُسب معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص فوجد بأنه يساوي (٠,٧) وأجرينا التحويلات التالية:

$$س^* = س + ٣، ص^* = ص - ٧، ١١ +$$

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س^{*}، ص^{*}.

$$\text{الحل: حسب النظرية، بما أن أ} = ٣، \text{ ح} = -٧،$$

فإن أ، ح > صفر وهذا يعني بأن معامل الارتباط بين س^{*}، ص^{*}

$$\text{يساوي} -ر (س، ص) = -٠,٧.$$

مثال (٤): أوجد معامل الارتباط بيرسون للبيانات التالية:

$$(س): ٦٨، ٦٨، ٦٤، ٦٤، ٦٢، ٦٢، ٦٢، ٦٠، ٦٠، ٦٠، ٦٠، ٦٨، ٦٨$$

$$(ص): ١٣٠، ١٢٥، ١٣٥، ١٤٠، ١٦٠، ١٦٥، ١٧٠، ١٥٥، ١٥٠، ١٥٠.$$

الحل: سنجري التحويلات التالية على المتغيرين (س، ص) قبل حساب معامل الارتباط:

$$\text{س}^* = \frac{\text{س} - 64}{2}, \quad \text{ص}^* = \frac{\text{ص} - 140}{5}$$

س	ص	س*	ص*	س* ص*	س*	ص*
60	130	2-	2-	4	4	4
60	125	2-	2-	6	4	9
60	135	2-	2-	2	4	1
62	140	1-	1-	صفر	1	صفر
62	160	1-	1-	4-	1	16
62	165	1-	1-	5-	1	25
64	170	∴	∴	صفر	صفر	36
64	155	∴	∴	صفر	صفر	9
68	150	2	2	4	4	4
68	150	2	2	4	4	4
المجموع		5-		16	33	108

الآن: بما أن معامل س موجب ومعامل ص موجب فإن معامل الارتباط بين س،

ص يساوي معامل الارتباط بين س*، ص* وعندئذ:

$$r_{\text{س، ص}} = r_{\text{س*، ص*}}$$

$$r_{\text{س، ص}} = r_{\text{س*، ص*}} = \frac{\sum \text{س}^* \text{ص}^*}{\sqrt{\left[\sum (\text{س}^*)^2 \right] \left[\sum (\text{ص}^*)^2 \right]}}$$

$$r_{\text{س، ص}} = \frac{16}{\sqrt{190 \times 824}} = \frac{16 \times 50 - 11 \times 10}{\sqrt{(16 \times 16 - 10 \times 10)(50 \times 50 - 11 \times 11)}} = 0,1471$$

(٤-٥) معامل الارتباط للترتيب (Coefficient Of Rank Correlation):

في كثير من الأحيان يصعب قياس متغير ما رقمياً ولكنه سهل تعيين رتب للمصفة أو الخاصية المراد دراستها عن هذا المتغير فمثلاً إذا كانت لدينا تقادير خمسة طلاب في مبحث ما فإنه من السهل ترتيب هذه التقادير من الأعلى للأسفل أو العكس وينطبق هذا التحليل على كثير من المسائل في علم الاقتصاد والإدارة والتربية وغيرها.

فإذا كان لدينا مجموعة من الأفراد وأعطينا رتب هؤلاء الأفراد من حيث النظر إلى صفتين معينتين لكل فرد أو الحكم على صفة من قبل حكمين اثنين أو ما شابه ذلك فإنه يتعذر علينا معرفة العلاقة بين الصفتين أو بين حكم الحكمين باستعمال معامل الارتباط بيرسون لعدم توافر البيانات العددية عن أفراد المجموعة ولكنه يمكن استعمال مقياس آخر لمعرفة مقدار الارتباط بين الصفتين والذي يسمى معامل الارتباط للرتب ومن أهم معاملات الارتباط للرتب:

معامل الارتباط سبيرمان (Spearman's Coefficient of Rank Correlation)

يعطى معامل الارتباط سبيرمان بالقانون التالي:

$$r_s = 1 - \frac{\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث: ن: عدد أزواج المشاهدات (س، ص).

د: الفرق بين الرتب للمتغيرين.

مثال (٥): احسب معامل الارتباط سبيرمان للجدول التالي:

رتبة س	١	٢	٤	٣	٥
رتبة ص	٣	١	٥	٢	٤

الحل:

رتبة س	رتبة ص	د = رتبة س - رتبة ص	د ²
١	٣	١ - ٣ = -٢	٤
٢	١	٢ - ١ = ١	١
٤	٥	٤ - ٥ = -١	١
٣	٢	٣ - ٢ = ١	١
٥	٤	٥ - ٤ = ١	١
المجموع			٨

$$\text{نس} = \frac{\sum f_i}{n} - 1 = \frac{8 \times 6}{(1-25)5} - 1 = \frac{48}{120} - 1 = -0,6$$

مثال (٦)، الجدول التالي يبين تقارير ثمانية طلاب في مبحثين مختلفين.
المطلوب: احسب معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
التقدير في المبحث (س)	ممتاز	جيد جداً	جيد	ضعيف	متوسط	جيد	ممتاز	جيد
التقدير في المبحث (ص)	جيد جداً	ممتاز	جيد	متوسط	متوسط	جيد جداً	ممتاز	متوسط

الحل:

رقم الطالب	تقدير (س)	تقدير (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف ^٢
١	ممتاز	جيد جداً	١,٥	٣,٥	٢-	٤
٢	جيد جداً	ممتاز	٣	١,٥	١,٥	٢,٢٥
٣	جيد	جيد	٥	٥	صفر	صفر
٤	ضعيف	متوسط	٨	٧	١	١
٥	متوسط	متوسط	٧	٧	صفر	صفر
٦	جيد	جيد جداً	٥	٣,٥	١,٥	٢,٢٥
٧	ممتاز	ممتاز	١,٥	١,٥	صفر	صفر
٨	جيد	متوسط	٥	٧	٢-	٤
المجموع						١٣,٥

$$\therefore \text{نس} = \frac{\sum f_i}{n} - 1 = \frac{13,5 \times 6}{(1-64)8} - 1 = \frac{81}{504} - 1 = -0,819$$

ونلاحظ في هذا المثال بأن التقدير ممتاز للمتغير س قد تكرر مرتين وأن التقدير (جيد) قد تكرر ثلاث مرات وفي مثل هذه الأحوال تكون رتب التقدير متساوية وتساوي متوسط الرتب المتتالية له فمثلاً للمتغير س فإن رتب التقدير ممتاز هي ١، ٢ ومتوسط هذه الرتب يساوي $\frac{2+1}{2} = 1,5$ وبالتالي فقد أعطينا الرتبة ١,٥ للتقدير ممتاز وبالنسبة لرتب التقدير (جيد) فهي ٤، ٥، ٦ ومتوسط هذه الرتب يساوي $\frac{6+5+4}{3} = 5$ ونلاحظ أننا أعطينا التقدير جيد الرتبة ٥ وهذا ما طبقناه في جميع الأحوال أينما تكرر التقدير.

مثال (٧): البيانات التالية توضح درجات الذكاء (س) ودرجات مستوى إجادة القراءة (ص) لعشرة أفراد احسب معامل الارتباط سبيرمان.

س	٢٩٧	٢١٦	١٣٣	٢٢٦	١١٧	٢٢٢	١٧٢	٢٠٧	١٥٠	٢٠٠
ص	٤٢	٤٦	٢٧	٢٤	٣٣	٤٠	٢٥	٢٩	٢٤	٤٣

الحل:

س	ص	رتبة س	رتبة ص	ف	ف ^٢
٢٩٧	٤٢	١	٣	٢-	٤
٢١٦	٤٦	٤	١	٣	٩
١٣٣	٢٧	٩	٦	٣	٩
٢٢٦	٢٤	٣	٨,٥	٥,٥	٣٠,٢٥
١١٧	٣٣	١٠	١٠	صفر	صفر
٢٢٢	٤٠	٢	٤	٢-	٤
١٧٢	٢٥	٧	٧	صفر	صفر
٢٠٧	٢٩	٥	٥	صفر	صفر
١٥٠	٢٤	٨	٨,٥	٥,٥-	٣٠,٢٥
٢٠٠	٤٣	٦	٢	٤	١٦
المجموع					٧٢,٥

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{\sum Y^2}{(n-1)} = \frac{77,5 \times 6}{(1-100) \times 10} = \frac{435}{99 \times 10} = 0,56 = \frac{37}{66} = \frac{435}{990} = 1 - 0,56 = 0,44$$

(٥-٥) تحليل الانحدار (Regression Analysis):

يعتبر تحليل الانحدار أحد الأساليب الإحصائية الهامة التي تستخدم في العديد من مجالات العلوم المختلفة، وتهدف دراسة الانحدار إلى تقدير معالم (مجاهيل) المعادلة الرياضية التي تعبر عن العلاقة السببية بين المتغيرات. ويجب التنويه بأن دراستنا مستقتصر على دراسة العلاقة بين المتغيرين (س، ص) عندما تكون هذه العلاقة خطية. ومن الأمثلة الشائعة التي يمثلها خط مستقيم في علم الاقتصاد هي العلاقة بين الدخل والاستهلاك حيث يعتبر الخط المستقيم في معظم الأحوال تقريباً جيداً لمنحنى الدخل والاستهلاك. ففي هذه العلاقة يكون المتغير التابع (ص) هو الاستهلاك من سلعة معينة ويكون المتغير المستقل هو الدخل المتاح للإنفاق.

وهذه العلاقة يمثلها الخط: ص = أ س + ب (١)

حيث أ، ب يمثلان معلمتي المعادلة (المجاهيل) المراد تقديرهما وذلك باستخدام بيانات معلومة عن (س، ص) ويطلق على هذه المعادلة (خط المحدار ص على س)

وتكتب عادة خط المحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ من الناحية العملية فإن المعادلة (١) لا تعبر عن

الظواهر السلوكية والطبيعية فمثلاً في حالة خط الدخل والاستهلاك نجد بأن المتغير التابع هو الكمية المستهلكة من سلعة ما. والمتغير المستقل هو الدخل المتاح للإنفاق. وهنا يطرح التساؤل التالي هل الدخل كممتغير مستقل هو العامل الوحيد الذي يؤثر على الكمية المستهلكة من سلعة ما؟ وبالطبع الإجابة على هذا السؤال بالنفي. لأن هنالك عوامل أخرى تؤثر على الكمية المستهلكة نذكر منها العمر، الجنس، الأذواق ... الخ. وبعض هذه العوامل يصعب قياسها أو يصعب الحصول على معلومات منها. وللتغلب على هذه العقبات من حيث عدم إمكانية تمثيل هذه العوامل المختلفة المؤثرة على المتغير التابع في العلاقة. فإننا سنستخدم متغيراً عشوائياً ويقوم بدور مجمع الأثر لكل هذه العوامل. فإذا رمزنا لهذا المتغير بالرمز (خ) وبالتالي فإن المعادلة (١) يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب} + \text{خ} \dots\dots\dots (٢)$$

وحل المعادلة (٢) يعتمد على عدد من أزواج القيم المشاهدة للاستهلاك (ص) والدخل (س) فإذا كان الدخل فقط هو العامل الوحيد والمؤثر الذي يفسر الاستهلاك ١٠٠% والذي يحكم سلوك المستهلك تعلمه فإننا نجد أن أي زوجين من قيم (س، ص) سوف تمكننا من تقدير قيمة وحيدة لكل من أ، ب أي أن جميع المشاهدات (س، ص) سوف تقع على خط مستقيم وبالتالي تكون قيمة خ = صفر.

وباستخدام عدد من أزواج القيم المشاهدة (س، ص) يتم تقدير أ، ب لتحديد هذا الخط المستقيم النظري بحيث يقل تأثير الخطأ العشوائي بأكثر قدر ممكن.

وبما أن قيمة خ لكل زوج من أزواج المشاهدات قد تكون موجبة (القيمة النظرية أقل من المشاهدة) أو سالبة (القيمة النظرية أكبر من المشاهدة) فإن محصلة هذا المتغير سوف لا تعبر فعلاً عن مدى انتشار النقط الفعلية حول الخط الممثل لهذه البيانات. وأحد الوسائل المتبعة هو محاولة جعل مجموع مربعات قيم هذا الخط أقل ما يمكن.

وتهدف طريقة المربعات الصغرى إلى تقدير قيم أ، ب باستخدام عدد من أزواج القيم (س، ص) بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء (خ) أقل ما يمكن.

طريقة المربعات الصغرى (Least Squares Method):

لنفترض بأن لدينا أزواج المشاهدات (س، ص)، (س، ص)، ... ، (س، ص) والتي تحقق المعادلة: ص = أ + س + ب + خ (٣).

حيث ر = ١، ٢، ... ، ن.

وهذه المعادلة هي معادلة المحدد $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}} \right)$.

وبالتالي: خ = ص - أ - س - ب (٤).

وبترتيب طرفي المعادلة (٤) ينتج:

$$\text{خ}^2 = (\text{ص} - \text{أ} - \text{س} - \text{ب})^2 \dots\dots\dots (٥).$$

ويأخذ المجموع للطرفين:

$$\sum_{r=1}^n \text{خ}^2 = \sum_{r=1}^n (\text{ص} - \text{أ} - \text{س} - \text{ب})^2 \dots\dots\dots (٦).$$

والمطلوب إيجاد قيمة أ، ب بحيث يكون $\sum_{r=1}^n x^2$ أقل ما يمكن.

الآن، باستعمل أسلوب التفاضل الجزئي يمكن إيجاد قيم أ، ب التي تحقق النهاية الصغرى لمجموع مربعات الأخطاء.

دعنا نرمز للطرف الأيمن في المعادلة (٦) بالرمز (ك) فإن المشتقات الجزئية بالنسبة إلى (أ، ب) على التوالي هي:

$$\sum_{r=1}^n 2 = \frac{26}{16} \quad (ص - أ - ب) \times (-س) \dots\dots\dots (٧)$$

$$\sum_{r=1}^n 2 = \frac{26}{6} \quad (ص - أ - ب) \times (١ -) \dots\dots\dots (٨)$$

ولإيجاد النهايات الصغرى نساوي المشتقات الجزئية بالصفر لنجد أن:

$$2 - \sum_{r=1}^n (ص - أ - ب) \times (س) = صفر \dots\dots\dots (٩)$$

$$2 - \sum_{r=1}^n (ص - أ - ب) = صفر \dots\dots\dots (١٠)$$

ويقسمة المعادلة (٩) & (١٠) على (٢-) وبفك الأقواس وترتيب الحدود ينتج أن:

$$\sum_{r=1}^n س - ص = أ \sum_{r=1}^n س + ب \sum_{r=1}^n ب \dots\dots\dots (١١)$$

$$\sum_{r=1}^n ص - ص = أ \sum_{r=1}^n س + ن ب \dots\dots\dots (١٢)$$

الآن بضرب المعادلة (١١) بـ ن والمعادلة (١٢) بـ $\sum_{r=1}^n س$ ينتج:

$$\sum_{r=1}^n س - ص = ن أ \sum_{r=1}^n س + ن ب \sum_{r=1}^ن س \dots\dots\dots (١٣)$$

$$\sum_{r=1}^ن س - ص = أ \left(\sum_{r=1}^ن س \right) + ن ب \sum_{r=1}^ن س \dots\dots\dots (١٤)$$

ويضرب المعادلة (١٤) بـ (١-) وجمعها مع المعادلة (١٣) ينتج:

$$\sum_{r=1}^n s_r s_r - \sum_{r=1}^n s_r s_r - \sum_{r=1}^n s_r s_r = \sum_{r=1}^n s_r s_r - \sum_{r=1}^n s_r s_r \quad (١٥)$$

وعندئذ فإن:

$$\frac{\sum_{r=1}^n s_r s_r - \sum_{r=1}^n s_r s_r}{\left(\sum_{r=1}^n s_r s_r \right) - \sum_{r=1}^n s_r s_r} = 1 \quad (١٦)$$

$$ب - ص = أ \quad (١٧)$$

كذلك فإن هنالك عدة صيغ لإيجاد أ نذكر منها:

$$\frac{\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})(s_r - \bar{s})}{\sum_{r=1}^n (s_r - \bar{s})^2} = 1 \quad (١٨)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^n s_r s_r - n \bar{s} \bar{s}}{\sum_{r=1}^n s_r s_r - n \bar{s} \bar{s}} = 1 \quad (١٩) \text{ أو } 1$$

مثال (٨)، إذا كان لدينا أزواج المشاهدات الآتية (س، ص) وكانت العلاقة بينهما يمكن أن يمثلها خطأ مستقيماً والمطلوب تقدير خط المحدار $\left(\frac{ص}{س} \right)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

(س): ١٠، ١٢، ١٦، ١٤، ١٨، ٢٠.

(ص): ٦، ١٢، ١٨، ١٦، ١٨.

الحل: معادلة المحدار $\left(\frac{ص}{س} \right)$ هي: $ص = أ س + ب$

ولإيجاد قيمة أ، ب ستكون جدول الحل:

س	ص	س ²	س ص	ص ²
١٠	٦	١٠٠	٦٠	٣٦
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٦	١٢	٢٥٦	١٩٢	١٤٤
١٤	٨	١٩٦	١١٢	٦٤
١٨	١٦	٣٢٤	٢٨٨	٢٥٦
٢٠	١٨	٤٠٠	٣٦٠	٣٢٤
٩٠	٧٢	١٤٢٠	١١٥٦	٩٦٨

وباستعمال المعادلتين (١٦) & (١٧) يمكن إيجاد قيمتي أ، ب.

$$\frac{7680 - 7936}{8100 - 8020} = \frac{72 \times 90 - 1156 \times 6}{90 \times 90 - 1420 \times 6} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{ص} \times \text{س}}{(\sum_{i=1}^n \text{س})^2 - \sum_{i=1}^n \text{ص}^2} = 1$$

$$1,086 = \frac{406}{420}$$

$$\text{ب} = \text{ص} - \text{أ} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \text{س}}{n} \times 1 = \frac{90}{6} \times 1,086 - \frac{72}{6}$$

$$12 - 10 \times 1,086 = -8,29$$

∴ معادلة الحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: ص = ١,٠٨٦ س - ٨,٢٩.

خذ انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$:

إذا كانت س تمثل المتغير التابع، ص تمثل المتغير المستقل فإن معادلة الحدار س على ص يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\text{س} = \text{م ص} + \text{ح} + \text{خ} \dots\dots\dots (٢٠)$$

ويمكن إيجاد قيمتي م، ح بنفس الأسلوب الذي اتبع في إيجاد أ، ب وبالتالي فإن:

$$\dots\dots\dots (٢١)$$

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{س} \times \text{ص}}{(\sum_{i=1}^n \text{ص})^2 - \sum_{i=1}^n \text{س}^2}$$

(٢٢) $\boxed{ح = س - م - ص}$

كذلك فإن هنالك عدة صيغ لإيجاد م نذكر منها:

(٢٣)
$$\frac{\sum (س - ص) \sum (م - ص)}{\sum (م - ص)^2} = م$$

(٢٤)
$$\frac{\sum (م - ص) \sum (س - ص)}{\sum (س - ص)^2} = م$$

مثال (٩)، بالاستفادة من البيانات الواردة والجدول المكوّن في المثل رقم (٨) أوجد

معادلة المحدار $\left(\frac{س}{ص} \right)$.

الحل: معادلة المحدار $\left(\frac{س}{ص} \right)$ هي: $س = م + ص + ح$

$$\frac{ن \sum س - \sum س \sum ص}{ن \sum ص - \sum ص \sum ص} = م$$

$$\frac{٧٢ \times ٩٠ - ١١٥٦ \times ٦}{٧٢ \times ٧٢ - ٩٦٨ \times ٦} = م$$

$$٠,٧٣ = \frac{٤٥٦}{٦٢٤} = \frac{٦٤٨٠ - ٦٩٣٦}{٥١٨٤ - ٥٨٠٨}$$

$$ح = س - م - ص = \frac{\sum س}{ن} - م - \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٧٢}{٦} \times ٠,٧٣ - \frac{٩٠}{٦} = \frac{\sum س}{ن} \times م - \frac{\sum ص}{ن}$$

$$= ١٥ - ١٢ \times ٠,٧٣ = ٦,٢٤$$

∴ معادلة المحدار $\left(\frac{س}{ص} \right)$ هي: $س = ٠,٧٣ ص + ٦,٢٤$

والنقطة التي يجب إيضاحها هي التفرقة بين خطي المحدار $\left(\frac{س}{ص} \right)$ ، المحدار $\left(\frac{س}{ص} \right)$

فلقد ذكرنا سابقاً أن هناك متغيرين أحدهما مستقل والآخر تابع. ووجدنا أن علاقة

مثل الدخل والاستهلاك يكون المتغير التابع (ص) هو الكمية المستهلكة من سلعة معينة والمتغير المستقل (س) هو الدخل وذلك استيفاء النظرية الاقتصادية.

والسؤال الذي نطرحه الآن: هل تقبل النظرية الاقتصادية أننعكس الوضع ويجعل المتغير التابع (ص) متغيراً مستقلاً و (س) متغيراً تابعاً. والإجابة على هذا التساؤل بالنفي طبعاً حيث أن هذا الأمر لا يعبر عن علاقة الدخل بالاستهلاك ولكن قد يتسائل البعض لماذا يوجد خطي التحدار لنفس أزواج القيم، والإجابة على هذا التساؤل تتلخص أن هنالك حالات يكون فيها س، ص متغيرين التغير في أي منهما يفسر التغير في الآخر، وبالتالي فوجود خطي التحدار ليس خطأ إذا استخدمنا في وضعهما الصحيح من الناحية العملية.

(٦-٥) العلاقة بين معامل الارتباط بيرسون وبين معاملات الانحدار:

حيث أن كلاً من الارتباط والانحدار يهدفان إلى التعرف على العلاقة بين المتغيرين س، ص فإنه من المتوقع وجود علاقة بينهما تمكننا من الحصول على قيمة أحدهما بمعلومية قيمة الآخر. فإذا كان أ هو معامل خط الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ ، م معامل خط الانحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ ، $\sigma_{ص}$ الانحراف المعياري للمتغير س، $\sigma_{س}$ الانحراف المعياري للمتغير ص فإن:

$$r = \text{معامل الارتباط} = \sqrt{A \times M} \dots\dots\dots (٢٥)$$

وتتحدد إشارة ر تبعاً لإشارة أ، م ومن الجدير بالذكر بأن أ، م لهما نفس الإشارة.

$$r = A \times \left(\frac{\sigma_{ص}}{\sigma_{س}}\right) \dots\dots\dots (٢٦)$$

$$r = M \times \left(\frac{\sigma_{س}}{\sigma_{ص}}\right) \dots\dots\dots (٢٧)$$

كذلك فإن معادلتني خطي الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ ، $\left(\frac{س}{ص}\right)$ يتقاطعان في النقطة $(\bar{ص}, \bar{س})$.

مثال (١٠): إذا كانت لديك البيانات التالية:

$$\sum ص = ٦٤، \sum س = ٦٤٠، \sum (ص - \bar{ص})(س - \bar{س}) = ٧٢٠ -$$

$$\sum (ص - \bar{ص})^2 = ١٢٠، \sum (س - \bar{س})^2 = ٥٠٠٠، ن = ٨$$

المطلوب: إيجاد:

- ١- معادلة المخدر $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ ٢- معادلة المخدر $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$
 ٣- معامل الارتباط بيرسون.

الحل:

$$(١) \text{ معادلة المخدر } \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) \text{ هي } \text{ص} = \text{أ} \text{ س} + \text{ب}.$$

$$\text{حيث } \text{أ} = \frac{\sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})(\text{س} - \bar{\text{س}})}{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2} = \frac{720}{120} = 6$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ} \bar{\text{س}} = \frac{72}{8} \times 6 - \frac{720}{8} = 32 - 48 - 80 = -116$$

$$\therefore \text{ معادلة المخدر } \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) \text{ هي: } \text{ص} = 6 \text{ س} - 116.$$

$$(٢) \text{ معادلة المخدر } \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) \text{ هي } \text{س} = \text{م} \text{ ص} + \text{ح}.$$

$$\text{م} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2} = \frac{720}{5000} = 0,144$$

$$\text{ح} = \bar{\text{س}} - \text{م} \bar{\text{ص}} = 8 - 0,144 \times 116 = 3,02$$

$$\therefore \text{ معادلة المخدر } \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) \text{ هي } \text{س} = 0,144 \text{ ص} + 3,02.$$

$$(٣) \text{ ر} = \sqrt{\frac{\text{أ} \times \text{م}}{6 \times 0,144}} = 0,93$$

مثال (١١): إذا كانت معادلة المخدر $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: $\text{ص} = \frac{1}{2} \text{ س} + 2,5$ ومعادلة المخدر $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ هي: $\text{س} = \frac{3}{2} \text{ ص} + 1$.

وكانت $\sigma = 12$ أوجد قيمة كل من $\bar{\text{ص}}$ ، $\bar{\text{س}}$ ، σ ، معامل الارتباط بيرسون.

الحل، معامل الارتباط بيرسون $\text{ر} = \sqrt{\frac{\text{أ} \times \text{م}}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}} = 0,93$

$$0.87 = \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

بما أن معادلتني خطتي الانحدار يتقاطعان في الأوساط الحسابية فإنه بكل المعادلتين
آنياً لحصل على \bar{S} ، \bar{S} .

$$\bar{S} = \frac{1}{4} + 2.5 \bar{S} \quad (1)$$

$$\bar{S} = \frac{3}{2} + 1 \bar{S} \quad (2)$$

بالتعويض بـ (\bar{S}) من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج:

$$\bar{S} = \frac{1}{4} + (1 + \frac{3}{2} \bar{S}) 2.5$$

$$\bar{S} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \bar{S} + 2.5 \bar{S} \Leftrightarrow \bar{S} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \bar{S} + 2.5 \bar{S}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{4} + 2.5 \bar{S} \Leftrightarrow 8 = \bar{S} \quad (3)$$

الآن بتعويض المعادلة (3) في (2) ينتج:

$$\bar{S} = \frac{3}{2} + 1 \times 8 = 11$$

وكذلك بما أن:

$$r = \frac{\bar{S}}{\sigma} \times 1 = 0.87 = \frac{1}{2} \times \frac{\bar{S}}{\sigma}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{0.87} = 1.14$$

(٧-٥) مسائل محلولة:

مسألة (١)، الجدول التالي يبين أطوال وأوزان (١٢) شخص

س	١٧١	١٨٣	١٥٦	١٦٥	١٦٧	١٦٨	١٧٦	١٧٤	١٨٠	٢٠٠	٢١٠	١٧٣
ص	٧٥	٨٠	٦١	٦٤	٦٧	٧٠	٨٠	٨٤	٩٠	١٠٠	٩٥	٧٣

أوجد ما يلي:

(١) معامل الارتباط بيرسون. (٢) معادلة الخطأ $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

(٣) معادلة الخطأ $\left(\frac{س}{ص}\right)$. (٤) ارسم شكل الانتشار.

(٥) ارسم خطي الخطأ.

الحل:

س	ص	س ص	س ^٢	ص ^٢
١٧١	٧٥	١٢٨٢٥	٢٩٢٤١	٥٦٢٥
١٨٣	٨٠	١٤٦٤٠	٣٣٤٨٩	٦٤٠٠
١٥٦	٦١	٩٥١٦	٢٤٣٣٦	٣٧٢١
١٦٥	٦٤	١٠٥٦٠	٢٧٢٢٥	٤٠٩٦
١٦٧	٦٧	١١١٨٩	٢٧٨٨٩	٤٤٨٩
١٦٨	٧٠	١١٧٦٠	٢٨٢٢٤	٤٩٠٠
١٧١	٨٠	١٤٠٨٠	٣٠٩٧٦	٦٤٠٠
١٧٤	٨٤	١٤٦١٦	٣٠٣٧٦	٧٠٥٦
١٨٠	٩٠	١٦٢٠٠	٣٢٤٠٠	٨١٠٠
٢٠٠	١٠٠	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠
٢١٠	٩٥	١٩٩٥٠	٤٤١٠٠	٩٠٢٥
١٧٣	٧٣	١٢٦٢٩	٢٩٩٢٩	٥٣٢٩
٢١١٣	٩٣٩	١٦٧٩٦٥	٣٧٨٠٨٥	٧٥١٤١
المجموع				

ن س ص س ص

$$\begin{aligned}
 (١) \quad r &= \frac{[\sum (س \cdot ص) - \frac{\sum س \cdot \sum ص}{n}]}{\sqrt{[\sum س^2 - \frac{(\sum س)^2}{n}] [\sum ص^2 - \frac{(\sum ص)^2}{n}]}} \\
 &= \frac{939 \times 2113 - 167965 \times 12}{\sqrt{[(939)^2 - 75141 \times 12] [(2113)^2 - 378085 \times 12]}} \\
 &= \frac{22083}{19961 \times 29991} = 0,9038
 \end{aligned}$$

(٢) معادلة الانحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: ص = أ + ب

$$٠,٧٣٨٨ = \frac{٢٢٠٨٣}{٢٩٩١} = \frac{\sum \text{ص} - \frac{\sum \text{ص} \sum \text{س}}{\sum \text{س}}}{\left(\sum \text{س} - \frac{(\sum \text{س})^2}{\sum \text{س}}\right)} = \text{أ}$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \overline{\text{س}} \times \text{أ} = \left(\frac{٩٣٩}{١٢}\right) - \left(\frac{٢١٣٣}{١٢} \times ٠,٧٣٨٨\right)$$

$$= -٥٢,٤٥٣$$

$$\therefore \text{ص} = ٠,٧٣٨٨ \text{ س} - ٥٢,٤٥٣$$

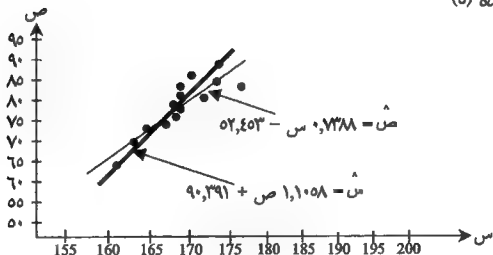
(٣) معادلة الانحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ هي س = م + ح

$$١,١٠٥٨ = \frac{٢٢٠٨٣}{١٩٩١} = \frac{\sum \text{س} - \frac{\sum \text{س} \sum \text{ص}}{\sum \text{ص}}}{\left(\sum \text{ص} - \frac{(\sum \text{ص})^2}{\sum \text{ص}}\right)} = \text{م}$$

$$\text{ح} = \overline{\text{س}} - \overline{\text{ص}} \times \text{م} = \left(\frac{٩٣٩}{١٢}\right) - \left(\frac{٢١٣٣}{١٢} \times ١,١٠٥٨\right) = -٩٠,٣٩١$$

$$\therefore \text{س} = ١,١٠٥٨ \text{ ص} + ٩٠,٣٩١$$

(٤) & (٥)



مسألة (٢)، إليك الجدول التالي:

س	٣	٢	١	٥	٤
ص	٦	٨	١٠	٤	٢

(أ) أوجد معامل الارتباط بيرسون بين س، ص.

(ب) معادلة المجدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(ج) احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة ص إذا علمت بأن س = ٥.

الحل:

س-ص	س-ص	ص-ص	(س-ص)(ص-ص)	(س-ص)	(ص-ص)
٣	٦	صفر	∴	صفر	صفر
٢	٨	١-	٢	٢	٤
١	١٠	٢-	٤	٨	٤
٥	٤	٢	٢-	٤	٤
٤	٢	١	٤-	٤	١
المجموع	٣٠	١٥	١٨-	١٠	٤٠

$$\bar{س} = \frac{١٥}{٥} = ٣, \bar{ص} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$r = \frac{\sum (س-ص)(ص-ص)}{\sqrt{\sum (س-ص)^2} \sqrt{\sum (ص-ص)^2}} = \frac{١٨-}{\sqrt{٤٠} \sqrt{٢٠}} = ٠,٩$$

(٢) معادلة المجدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي ص = أ س + ب

$$١,٨ = \frac{١٨-}{١٠} = \frac{\sum (س-ص)(ص-ص)}{\sum (س-ص)^2} = ١$$

$$ب = ص - أ س = ٦ - (٣ \times ١,٨) = ٠,٤$$

$$\therefore ص = ١,٨ س + ٠,٤$$

$$(٣) \text{ القيمة المتنبأ بها لـ ص} = \text{ص} - ١,٨ \times ٥ = ١١,٤ - ٢,٤ = ٨$$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

$$= ٢,٤ - ٤ = ١,٦$$

مسألة (٣)، إذا كانت معادلة انحدار خط المحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: $\text{ص} = \frac{1}{٧} \text{س} + ٧$ وكان

$$\sum_{\text{س}}^{\text{ص}} = ٦٤٠ = \sum_{\text{س}}^{\text{ص}} = ٢٥٠ \text{ أوجد معامل الارتباط}$$

بيرسون بين س، ص.

الحل،

$$\text{بما أن } ١ = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \text{ر} \dots\dots\dots (١)$$

نجد أولاً: $\sigma_{\text{ص}}, \sigma_{\text{س}}$.

$$\sigma_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٦٤٠}{١٠}} = ٨$$

$$\sigma_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٢٥٠}{١٠}} = ٥$$

وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج:

$$\frac{١}{٧} = \text{ر} \times \frac{٥}{٨} \Rightarrow \text{ر} = ٤ = ٤ - ٠,٨$$

مسألة (٤)، إذا كان معامل الارتباط سبيرمان (الرتب) بين المتغيرين س، ص يساوي

(٠,٦) وكان عدد أزواج المشاهدات يساوي (٥٠) أوجد مجموع مربعات

الفروق في الرتب بين س، ص.

الحل،

باستخدام قانون معامل الارتباط سبيرمان:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{(n-1)} - 1 = 1$$

$$r = 1 = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{(1-2500)50} - 1$$

$$\frac{2499 \times 50 \times 0.4}{1} = \sum_{i=1}^n 1 \Leftrightarrow 0.4 = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{2499 \times 50} \Leftrightarrow$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n 1 = 8430$$

تمارين الوحدة الخامسة

س١: الجدول التالي يبين علاقات (٩) طلاب في مبحث الإحصاء وأساليب تدريس الرياضيات.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
علامة الإحصاء (س)	٨٥	٩٤	٦١	٧٥	٧٦	٧٠	٦٥	٩٠	٥٠
علامة الأساليب (ص)	٨٠	٨٥	٩٠	٧١	٨٠	٦٠	٥٥	٤٥	٦٠

المطلوب: (أ) ارسم شكل الانتشار.

(ب) أوجد معامل الارتباط بيرسون.

(ج) أوجد معامل الارتباط سبيرمان.

(د) أوجد معادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(هـ) أوجد معادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.

س٢: إليك البيانات التالية:

$$\sum \text{س} = ٨٠٠, \sum \text{ص} = ٨١١, \sum \text{س ص} = ٥٤١٠٧$$

$$\sum \text{س}^2 = ٥٣٤١٨, \sum \text{ص}^2 = ٥٤٨٤٩, \text{ن} = ١٢$$

أوجد: (١) معامل الارتباط بيرسون.

(٢) معادلة المحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(٣) معادلة المحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.

$$\text{س}٣: \text{إذا كانت } \sum_{\text{س}} \left(\text{س}, -\text{س} \right) \left(\text{ص}, -\text{ص} \right) = ٦٠٠$$

$$700 = \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2, 1000 = \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2$$

أوجد:

(١) معادلة خط الانحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$.

(٢) معادلة خط الانحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$.

(٣) معامل الارتباط بيرسون.

س٤، إذا كانت معادلة خط الانحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$ هي: $s = ٧ - ١١$ ومعادلة خط

الانحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$ هي: $s = ١,٢٨ + ١٤$.

أوجد: (١) الوسط الحسابي للمتغير s .

(٢) الوسط الحسابي للمتغير \bar{s} .

(٣) معامل الارتباط بيرسون.

(٤) الانحراف المعياري للمتغير s .

إذا علمت أن الانحراف المعياري للمتغير s يساوي (١٠).

س٥، إليك الجدول التالي:

١٥	١٢	٦	٩	٣	s
١٠	٨	٦	٢	٤	\bar{s}

أوجد ما يلي: (١) معادلة الانحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$.

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{s}{\bar{s}} \right)$.

(٣) قيمة s المتنبأ بها عندما $s = ١٢$ ثم أوجد الخطأ في التنبؤ؟

(٤) قيمة s المتنبأ بها عندما $s = ١٠$ ثم أوجد الخطأ في التنبؤ؟

س٥: ارسم خط المحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

س٦: الجدول التالي يبين رتب ثمانية متسابقين في مسابقتين رياضيتين احسب معامل الارتباط سبيرمان.

رتبة (س)	٣	٢	١	٤	٥,٥	٧	٨	٥,٥
رتبة (ص)	٢,٥	١	٢,٥	٥	٧	٥	٥	٨

س٧: الجدول التالي يبين تقادير (٩) طلاب في مبحثين مختلفين:

التقدير (س)	جيد	متوسط	ضعيف	ممتاز	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد
التقدير (ص)	ممتاز	متوسط	ممتاز	جيد جداً	جيد	جيد جداً	ممتاز	متوسط

أوجد معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

س٨: إذا كانت معادلة خط المحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: $ص = ٤,٥ س + ١٧$ وكانت $ر = ٠,٧$,

$س = ٦٠$ أوجد معادلة المحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

س٩: إذا كانت مجموع مربعات فروق الرتب بين س، ص يساوي (٥٣٩٤) وكان عدد أزواج المشاهدات (٣٠) أوجد معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

س١٠: إذا كانت معادلة خط الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: $ص = ٣,٠ س + ٢٠$ وكان $س = ٤٠$,

$$\sum_{i=1}^{10} (س_i - \bar{س})^2 = ٣٧٥ = \sum_{i=1}^{10} (ص_i - \bar{ص})^2 = ٩٦٠.$$

أوجد (١) معادلة المحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

(٢) معامل الارتباط بيرسون.

الاحتمالات

The Probability

مقدمة

(١-٦) فضاء العينة والأحداث.

(٢-٦) خواص الاحتمالات.

(٣-٦) الفضاء العيني المنتظم.

(٤-٦) التبديل.

(٥-٦) التوافق.

(٦-٦) الحوادث المشروطة واحتمالاتها.

(٧-٦) الحوادث المستقلة واحتمالاتها.

(٨-٦) المتغيرات العشوائية.

(٩-٦) توزيع ذات الحدين.

(١٠-٦) مسائل محلولة.

تمارين الوحدة.

الاحتمالات

The Probability

مقدمة:

قبل البدء في دراسة الاحتمالات لابد من التعرف على نوع من التجارب وهي التجارب العشوائية، فمثلاً عند رمي قطعة نقد متزنة فليس من المؤكد بأنه ستظهر صورة مثلاً. لكن نفترض أننا كررنا هذه التجربة في رمي قطعة نقد وأن (ق) هو عدد مرات النجاح (أي ظهور الصورة عند رمي قطعة النقد) وأن (ن) هو عدد رميات قطعة النقد وبالتالي فإن التكرار النسبي لـ ق يساوي $\left(\frac{ق}{ن}\right)$ وكلما زادت (ن) نلاحظ بأن هذه النسبة تصبح مستقرة. وعلى هذا الاستقرار بنيت نظرية الاحتمال.

(١-٦) فضاء العينة والأحداث: (Sample Space & Events)

تعريف (١):

تسمى مجموعة كل النواتج الممكنة لأي تجربة عشوائية بالفضاء العيني وسنرمز له بالرمز (Ω).

تعريف (٢):

أي مجموعة جزئية من الفضاء العيني يسمى الحدث.

أنواع الأحداث:

- ١- الحدث المستحيل: وهو الحدث الذي يستحيل وقوعه وسنرمز له بالرمز (∅).
- ٢- الحدث البسيط: وهو الحدث الذي يحتوي عنصر واحد
- ٣- الحدث المركب: وهو الحدث الذي يحتوي على أكثر من عنصر واحد
- ٤- الحدث الأكيد (المؤكد): وهو الحدث المؤكد وقوعه وهو (Ω).

أمثلة:

- ١- ألقي حجر نرد مرة واحدة ولو حظ العدد الظاهر أوجد ما يلي:
i - اكتب الفضاء العيني بذكر عناصره

- ii - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي واذكر نوعه.
- iii - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد فردي واذكر نوعه.
- iv - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي.
- v - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي ويقبل القسمة على (٢) واذكر نوعه.
- vi - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي ويقبل القسمة على (٥) واذكر نوعه.
- vii - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي أو يقبل القسمة على (٣).
- viii - اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي وعدد فردي.

الحل:

- i - الفضاء العيني لهذه التجربة هو $\Omega = \{ ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦ \}$
- ii - لنفترض (أ) بأنه الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي وبالتالي فإن:
 $A = \{ ٢, ٤, ٦ \}$ ونوع الحدث مركب.
- iii - ليكن (ب) هو حدث يمثل ظهور عدد فردي فإن:
 $B = \{ ١, ٣, ٥ \}$ ونوع الحدث مركب.
- iv - ليكن (ج) هو حدث يمثل ظهور عدد أولي فإن:
 $C = \{ ٢, ٣, ٥ \}$
- v - ليكن (د) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٢):
 $D = \{ ٢, ٤, ٦ \}$ وبالتالي فالمللوب $C \cap D =$ العناصر المشتركة بين C و D
 $= \{ ٢ \}$ ونوع الحدث بسيط.
- vi - ليكن (هـ) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٥).
 $E = \{ ٥ \}$ ∴
- vii - ليكن (و) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٣).
 $F = \{ ٣, ٦ \}$ ∴ و
- ∴ وبالتالي فالمللوب $A \cup F =$ العناصر الموجودة في A أو موجودة في F
 $= \{ ٢, ٣, ٤, ٦ \}$
- viii - المطلوب هو $A \cap B =$ ظهور عدد زوجي وفردي في نفس الوقت.
 $= \emptyset$ ونوع هذا الحدث مستحيل.

ملاحظة:

نتطلق على الأحداث الواردة في الفرع (viii) الحوادث المتنامعة (المتنافية) وأحياناً نسميها حوادث منفصلة.

٢- في تجربة رمي قطعة نقد ثلاث مرات أوجد ما يلي:

(أ) اكتب الفضل العيني (Ω) بذكر عناصره.

(أ) اكتب الحدث (أ) الذي يمثل ظهور صورة واحدة فقط.

(أ) اكتب الحدث (ب) الذي يمثل ظهور صورتين فقط.

(أ) اكتب الحدث (ج) الذي يمثل ظهور ثلاث صور فقط.

(أ) اكتب الحدث (د) الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل.

(أ) اكتب الحدث (هـ) الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الأكثر.

(أ) اكتب الحدث (و) الذي يمثل ظهور صورة واحدة أو كتابة واحدة.

الحل:

(أ) $\Omega = \{ ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك \}$

(أ) $A = \{ ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص \}$.

(أ) $B = \{ ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص \}$.

(أ) $C = \{ ص ص ص \}$.

(أ) $D = \{ ص ص ص، ص ص ك، ك ص ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك \}$.

(أ) $H = \{ ك ك ص، ك ص ك، ك ك ك \}$.

(أ) $W = A \cup B = \{ ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص \}$.

(٦-٢) خواص الاحتمالات:

ليكن Ω الفضل العيني و S مجموعة من الأحداث وليكن H اقتران حقيقي معرف على S . يسمى H اقتران (دالة) احتمال ويسمى العنصر (أ) احتمال الحدث (أ) إذا تحققت الخواص التالية:

١- لأي حدث أ فإن: $0 \leq P(A) \leq 1$.

٢- $P(\Omega) = 1$.

٣- إذا كان أ، ب حدثين منفصلين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

٤- إذا كان أ، أ١، ...، أ١٠٠ أحداث منفصلة متني متني (بمعنى أنه $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$) فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{100}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{100}).$$

نظريات في الاحتمال:

١- إذا كانت \emptyset هي المجموعة الخالية فإن $P(\emptyset) = 0$.

٢- إذا كان أ هو الحدث المتمم للحدث أ فإن:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

٣- إذا كان أ، ب حدثين في Ω وكان $A \supset B$ فإن: $P(A) \geq P(B)$.

٤- إذا كان أ، ب حدثين في Ω فإن:

$$(i) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$(ii) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

$$(iii) P(\bar{A} - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

$$(iv) P(\bar{A} - B) = P(\bar{A}) - P(A \cap B).$$

$$(v) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

$$(vi) P(\bar{A} \cap B) = P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

ملاحظة: نسمي (v) & (vi) قانوني ديورغان في الاحتمالات.

٥- إذا كان أ، ب، ج أحداث في Ω فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cup B \cup C).$$

مثال (٣): ليكن أ، ب حدثين في Ω بحيث $P(A) = \frac{1}{8}$ ، $P(B) = \frac{2}{8}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \text{ أوجد ما يلي:}$$

$$(1) P(A) \quad (2) P(\bar{B}) \quad (3) P(A \cup B).$$

$$(٦) \text{ ح } (ا \cap ب). \quad (٥) \text{ ح } (ا \cap ب). \quad (٤) \text{ ح } (ا \cap ب). \quad (٧) \text{ ح } (ا \cup ب).$$

الحل:

$$(١) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (١) \text{ ح } (ا \cap ب) = ٠ - ١ = -١ \quad (٢) \text{ ح } (ا \cap ب) = ٠ - ١ = -١$$

$$(٢) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٣) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

$$(٣) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٤) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

$$(٤) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٥) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

$$(٥) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٦) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

$$(٦) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٧) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

$$(٧) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (ب) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠ \quad (٨) \text{ ح } (ا \cap ب) = ١ - ١ = ٠$$

مثال (٤):

إذا كان نسبة الطلبة الذين عيونهم زرقاء يساوي ٣٠٪ ونسبة الطلبة الذي شعرهم أشقر يساوي ٤٠٪ ونسبة الطلبة الذي عيونهم زرقاء وشعرهم أشقر يساوي ٢٠٪ اختبر إحدى الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن يكون هذا الطالب شعره أشقر أو عيون زرقاء

(٢) احتمال أن لا تكون عيون زرقاء

(٣) احتمال أن يكون عيون زرقاء وشعره ليس أشقر.

(٤) احتمال أن لا تكون عيون زرقاء وشعره ليس أشقر.

الحل: ليكن أ: الحدث الذي يمثل ظهور طالب عيون زرقاء فإن $P(A) = ٠,٣$.

ب: الحدث الذي يمثل ظهور طالب شعره أشقر فإن $H = 0.4$.
ملاحظة: أداة الربط (أو) تعني الاتحاد (\cup) وأداة الربط (و) تعني (\cap) وأدوات
 النفي تعني المتممة.

أ: طالب عيونه زرقاء وشعره أشقر فإن $H \cap A = 0.2$.

(١) المطلوب في هذا الفرع هو احتمال الحدث أ أو الحدث ب والذي يساوي

$$H \cup B = H + (B - H \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.2 = 0.5.$$

(٢) المطلوب هنا هو متمم الحدث أ أي المطلوب $H^c = 1 - H = 1 - 0.4 = 0.6$.

$$(H \cap B)^c = H^c + (H \cap B) = 0.6 + 0.2 = 0.8.$$

$$(H \cup B)^c = 1 - (H \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

(٣-٦) **الفضاء العيني المنتظم:** (Uniform Sampling Space):

تعريف:

نقول بأن فضاء عيني معين بأنه منتظم إذا كان لكل عنصر فيه نفس فرصة
 الحدوث. فمثلاً إذا كان الفضاء العيني (Ω) يحتوي على (n) عنصر فإن احتمال كل
 عنصر فيه يساوي $\left(\frac{1}{n}\right)$ وبالتالي فإن احتمال الحدث (A) في الفضاء العيني المنتظم
 (Ω) يساوي:

$$H(A) = \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

مثال (٥): أختيرت ورقة من ورق اللعب (الشلة) بطريقة عشوائية أوجد احتمال ما
 يلي:

(١) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة بستوني.

(٢) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة أس.

(٣) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة صورة.

(٤) الحدث الذي يمثل ظهور صورة بستوني.

الحل: ليكن أ: يمثل ظهور ورقة بستوني.

ب: يمثل ظهور ورقة أس.

ح: يمثل ظهور ورقة صورة.

$$(١) \text{ ح (أ)} = \frac{\text{عدد ورق البستوني}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{١٣}{٥٢} = \frac{١}{٤}$$

$$(٢) \text{ ح (ب)} = \frac{\text{عدد ورق الأس}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$$

$$(٣) \text{ ح (ح)} = \frac{\text{عدد الصور}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$$

$$(٤) \text{ ح (أ) ح (ح)} = \frac{\text{عدد الصور البستونية}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{٣}{٥٢}$$

مثال (٦)، لتكن التجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحوادث التالية:

(١) الحدث أ: الذي يمثل مجموع العددين الظاهرين يساوي (١٠).

(٢) الحدث ب: الذي يمثل الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي (٥).

(٣) الحدث ح: الذي يمثل أحد الوجهين الظاهرين يساوي (١).

الحل، الفضاء العيني لهذه التجربة هو: $\Omega = \{ (١, ١), (١, ٢), \dots, (٦, ٦) \}$

(١) الحدث أ = $\{ (٤, ٦), (٥, ٥), (٦, ٤) \}$

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد عناصر (أ)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

(٢) الحدث ب = $\{ (١, ٦), (٦, ١) \}$

$$\text{ح (ب)} = \frac{\text{عدد عناصر (ب)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٢}{٣٦} = \frac{١}{١٨}$$

(٣) الحدث $\Omega = \{ (١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٣, ١), (٤, ١), (٥, ١), (٦, ١), (١, ٢), (١, ٣) \}$
 $\{ (١, ٦), (١, ٥), (١, ٤) \}$

$$ح(ج) = \frac{\text{عدد عناصر (ج)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{١١}{٣٦}$$

(٦-٤) التباديل: (The Permutations):

تعريف: يسمى وضع (ن) من الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل لهذه الأشياء (بشرط أن تؤخذ جميع الأشياء) ويسمى وضع أي عدد (ر) بحيث $(ر \geq ن)$ من هذه الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل العدد (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة.

مثال (٧)، اعتبر بأنه لدينا الحروف التالية: أ، ب، ج، د، هـ، ووجد:

(١) تبديل الثلاثة حروف مأخوذة جميعها في كل مرة.

(٢) تبديل الثلاثة حروف مأخوذة اثنين في كل مرة.

الحل: (١) تبديل الحروف الثلاثة مأخوذة جميعها في كل مرة هي:

أ ب ج، أ ج ب، ب أ ج، ب ج أ، ج أ ب، ج ب أ

(٢) تبديل الحروف الثلاثة مأخوذة اثنين في كل مرة هي:

أ ب ج، أ ج ب، ب أ ج، ب ج أ، ج أ ب، ج ب أ

مثال (٨)، أوجد عدد التباديل المكونة من ستة أرقام وهي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ والمأخوذة ثلاثة في كل مرة.

الحل: المطلوب هنا عدد الأرقام المكونة من ثلاث منازل مختلفة من هذه الأرقام الستة المختلفة وبالتالي لها الصورة التالية:

منزلة المئات	منزلة عشرات	منزلة آحاد
--------------	-------------	------------

وعلى هذا يمكن اختيار منزلة الآحاد بطرق عددها (٦) ومنزلة المئات بطرق عددها (٥) ومنزلة العشرات بطرق عددها (٤) وعليه فإن عدد التباديل تساوي:

$$١٢٠ = ٤ \times ٥ \times ٦$$

رمز المضروب: يعرف مضروب العدد (ن) بالرمز التالي:

$$١ \times ٢ \times ٣ \times \dots \times ن = ن!$$

ملاحظة: (١) $1 = 1$

(٢) $1 = 1$

$$(٣) \quad 1 \times n = 1 \times n - 1 \times n - 2 \times n \times \dots \times r$$

حيث $r \geq n$.

ملاحظة: سنستخدم الرمز $T(n, r)$ ليدل على تبادل n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة.

نظرية: ليكن r, n عددين صحيحين موجبين بحيث $r \geq n$ فإن:

$$T(n, r) = \frac{n!}{1(r-n)}$$

ملاحظة: (١) $T(n, n) = 1$

(٢) $T(n, 0) = 1$

العينات المرتبة (Ordered Samples):

أن سحب كرة من وعاء به (n) من الكرات أو اختيار ورقة من مجموعة أوراق أو اختيار شخص من مجتمع عدد معين من المرات مقداره (r) بعينة مرتبة حجمها (r) وسوف نقوم بدراسة حالتين مختلفتين:

(١) السحب مع الإرجاع: في هذه الحالة تعاد كرة إلى الوعاء قبل سحب الكرة الثانية وحيث أنه يوجد (n) طريقة لاختيار الكرة الأولى و (n) طريقة لاختيار الكرة الثانية وهكذا وبالتالي فإن عدد العينات المرتبة ذات الحجم (r) مع الإرجاع تساوي: $n \times n \times \dots \times n = n^r$.

r من المرات

(٢) السحب دون إرجاع: في هذه الحالة لا تعاد الكرة إلى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وبذلك لا توجد تكرارات في العينة المرتبة وعليه يكون عدد العينات المرتبة إذا كان السحب دون إرجاع هو تبادل (n) من الأشياء مأخوذة (r) في كل مرة وهذا يساوي $T(n, r)$.

مثال: كيس يحتوي على (١٠) كرات سحب عينة مكونة من (٤) كرات أوجد ما يلي:

- (١) عدد العينات المكونة من أربع كرات إذا كان السحب مع الإرجاع.
 (٢) عدد العينات المكونة من أربع كرات إذا كان السحب بدون إرجاع.
الحل: (١) إذا كان السحب مع الإرجاع فإن الكرة الأولى التي تسحب تعاد قبل سحب الكرة الثانية وعليه يكون عدد العينات $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$.
 (٢) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الكرة الأولى التي تسحب لا تعاد قبل سحب الكرة التالية وعليه يكون عدد العينات $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

(٥-٦) التوافيق: (The Combinations)

- يعرف توافق (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة بأنه عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي (ر) عنصر من مجموعة عدد عناصرها (ن).
 مثال (٩)، أوجد عدد توافق الحروف أ، ب، ح مأخوذة اثنين في كل مرة.
الحل: المطلوب عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها (٢) من المجموعة {أ، ب، ح} وبالتالي فإن المجموعات الجزئية هي:
 {أ، ب}، {أ، ح}، {ب، ح} وعليه يكون عدد المجموعات الجزئية تساوي (٣).
 ملاحظة: سنرمز لتوافق (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة بالرمز تو (ن، ر).

$$\text{نظرية: تو (ن، ر)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نظرية: ليكن ن، ر عدد صحيحين بحيث $r \leq n$ فإن:

$$(1) \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \binom{n}{b} = \binom{n}{a} \Leftrightarrow a = b \text{ أو } a + b = n$$

$$(2) \quad 1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} \quad (3) \quad n = \binom{n}{1}$$

$$(4) \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad (5) \quad \frac{1-n \times n}{2} = \binom{n}{2}$$

مثال: كم لجنة رباعية يمكن تكوينها من عشرة أشخاص؟

الحل: عدد اللجان الرباعية التي يمكن تكوينها من عشرة أشخاص هي توافق (١٠)

$$210 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} = \binom{10}{4}$$

الجزئيات المرتبة، (Ordered Partitions):

لنفترض بأن لدينا وعاء A به n من الكرات مرقمة بالأعداد من ١ إلى n ولنفرض أننا نريد حساب عدد الطرق التي يمكن سحب (n_1) كرة من الوعاء ثم سحب (n_2) كرة من الوعاء ... وهكذا إلى سحب (n_r) كرة من الوعاء وبعبارة أخرى حساب عدد التجزئيات المرتبة (n_1, \dots, n_r) لمجموعة الكرات (n) إلى مجموعات جزئية بحيث تحتوي A_1 على n_1 كرة، A_2 تحتوي على n_2 كرة شريطة أن تكون $n = n_1 + \dots + n_r$.

في البداية توجد لدينا n كرة في الوعاء فإنه توجد $\binom{n}{n_1}$ طريقة لسحب n_1 كرة وبعد ذلك يتبقى $(n - n_1)$ كرة في الوعاء فإنه توجد $\binom{n - n_1}{n_2}$ طريقة لتحديد المجموعة الجزئية الثانية A_2 ... وهكذا وعليه يكون عدد التجزئيات المختلفة تساوي:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

مثال (١٠): بكم طريقة يمكن توزيع (١١) لعبة على خمسة أطفال بحيث يتلقى الطفل الأول خمس لعب والباقي لعبتين.

الحل: عدد الطرق التي يمكن توزيع (١١) لعبة على خمسة أطفال تساوي:

$$41580 = \frac{11!}{3! 2! 2! 2! 2!} = \binom{11}{3} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}$$

مثال (١١): صندوق فيه (٨) مصابيح من بينها (٣) مصابيح معيبة سحب مصباحين أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن يكون المصباحين صالحين.

(٢) احتمال أن يكون المصباحين معيبين.

الحل: يمكن اختيار مصباحين من بين ثمانية مصابيح بطرق عددها تساوي $\binom{8}{2}$

٢٥٨ طريقة.

ويمكن اختيار مصباحين صالحين بعدد طرق يساوي $10 = \binom{5}{2}$

ويمكن اختيار مصباحين معييين بعدد طرق يساوي $3 = \binom{3}{2}$

وعليه يكون:

$$(1) \text{ احتمال الحصول على مصباحين صالحين } = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$(2) \text{ احتمال الحصول على مصباحين معييين } = \frac{3}{28}$$

مثال (١٢): سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من ورق اللعب أوجد احتمال ما يلي:

(١) كلا الورقتين المسحوبتين ديناري.

(٢) إحدى الورقتين ديناري والأخرى سانك.

الحل: توجد $1331 = \binom{52}{2}$ طريقة لسحب ورقتين من الشدة.

ويوجد $78 = \binom{13}{2}$ طريقة لسحب ورقتين ديناري من بين (١٣) ورقة ديناري.

ويوجد $169 = 13 \times 13$ طريقة لسحب ورقة ديناري والأخرى سانك وعليه يكون:

عدد الطرق التي يمكن سحب ورقتي الديناري

(١) احتمال أن تكون الورقتين ديناري = $\frac{\text{عدد الطرق التي يمكن سحب ورقتين من الشدة}}{\text{عدد الطرق التي يمكن سحب ورقتين من الشدة}}$

$$\frac{1}{17} = \frac{78}{1331}$$

(٢) احتمال أن تكون إحدى الورقتين ديناري والأخرى سانك = $\frac{169}{1331} = \frac{13}{102}$

مثال (١٣): اختيرت أربعة مصابيح كهربائية من بين عشرة مصابيح كهربائية منها

أربعة تالفة أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن تكون جميعها سليمة.

(٢) احتمال أن تكون جميعها تالفة.

(٣) احتمال أن يكون واحد فقط تالف.

(٤) احتمال أن يكون واحد على الأقل تالف.

الحل: يوجد هنالك $\binom{10}{4} = 210$ طريقة لاختيار (٤) مصابيح من بين عشرة مصابيح.

(١) بما أن عدد المصابيح السليمة $= 10 - 4 = 6$ مصابيح فإنه يوجد $\binom{6}{4} = 15$

طريقة لاختيار المصابيح السليمة. وبالتالي فاحتمال أن تكون جميعها سليمة

$$= \frac{15}{210} = \frac{1}{14} = \frac{0}{100} = 0\%$$

(٢) بما أن عدد المصابيح التالفة $= 10 - 6 = 4$ مصابيح فإنه توجد $\binom{4}{4} = 1$ طريقة

لاختيار المصابيح التالفة وبالتالي فاحتمال أن تكون جميعها تالفة يساوي $\frac{1}{210}$.

(٣) يوجد هنالك $\binom{10}{3} \binom{4}{1} = 80$ طريقة لاختيار مصباح واحد فقط تالف وبالتالي

$$\text{فلاحتمال} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

(٤) الحدث الذي يمثل وجود مصباح واحد تالف على الأقل هو الحدث المتمم لأن

تكون جميعها سليمة وبالتالي فاحتمال وجود على الأقل واحد تالف

$$\text{يساوي } 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

مثال (١٤): سحبت ورقتين بطريقتين عشوائية من بين (١٠) ورقات مرقمة بالأعداد

من ١ إلى ١٠ أوجد احتمال أن يكون مجموعهما زوجياً.

(١) تم سحب الورقتين معاً.

(٢) تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى دون إرجاع.

(٣) تم سحب الورقتين ورقة بعد أخرى مع الإرجاع.

الحل: (١) يوجد $\binom{10}{2} = 45$ طريقة لاختيار ورقتين من بين (١٠) ورقات ويكون

المجموع زوجياً إذا كان العددين كليهما زوجياً أو فردياً وبما أنه يوجد لدينا ٥ أرقام زوجية و ٥ أرقام فردية وبما أنه إذا ظهر إحدى الورقتين عدد زوجي فيجب أن تكون الورقة الأخرى عدد زوجي وعليه يكون إحدى الورقتين يتم اختيارها بـ ٥ طرق وأخرى بـ ٤ طرق وعليه يكون هنالك ٢٠ طريقة لاختيار عددين زوجي أو فرديين وبالتالي فالاحتمال $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.

(٢) توجد هنالك $10 \times 9 = 90$ طريقة لسحب ورقتين ورقية بعد أخرى بدون إرجاع وتوجد $5 \times 4 = 20$ طريقة لسحب عدد زوجي ثم عدد زوجي وكذلك $5 \times 4 = 20$ طريقة لسحب عدد فردي ثم عدد فردي وبالتالي فالاحتمال $\frac{20+20}{90} = \frac{4}{9}$.

(٣) توجد هنالك $10 \times 10 = 100$ طريقة لسحب ورقتين واحدة بعد أخرى مع الإرجاع وتوجد $5 \times 5 = 25$ طريقة لسحب عدد زوجي ثم عدد زوجي وكذلك $5 \times 5 = 25$ طريقة لسحب عدد فردي ثم عدد فردي وبالتالي فالاحتمال المطلوب $\frac{25+25}{90} = \frac{5}{9}$.

تعريف: ليكن A, B, \dots ، أن حوادث في Ω فإننا نسمى هذه الحوادث متباعدة وشاملة إذا حققت الشروط التالية:

(١) منفصلة متنى متنى أي بمعنى $A \cap B = \emptyset$ لكل $r \neq k$

(٢) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

مثال (١٥): ليكن التجربة رمي حجر نرد مرة واحدة ولتكن:

$A_1 = \{1, 2, 3\}$ $A_2 = \{4, 5\}$ $A_3 = \{6\}$ هل A_1, A_2, A_3 لم متباعدة وشاملة.

الحل: نتحقق من الشروط الواردة في التعريف:

(١) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ، $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ ، $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

وبالتالي A_1, A_2, A_3 لم متباعدة (منفصلة).

(٢) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

وبالتالي فإن A_1, A_2, A_3 لم متباعدة وشاملة.

نظرية: إذا كان A_1, A_2, \dots ، أن متباعدة وشاملة فإن:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

مثال (١٦): ليكن A_1, A_2 أم حوادث متباعدة وشاملة في Ω بحيث $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{4}$ أوجد $P(A_1)$.

الحل: A_1, A_2 أم حوادث متباعدة وشاملة فإن $P(A_1) + P(A_2) = 1$ ومنها $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + P(A_3) = 1 \Rightarrow P(A_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

مثال: صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد في الرمية الواحدة متناسباً مع العدد نفسه (فمثلاً احتمال ظهور العدد ٢ ضعف احتمال ظهور العدد ١).

أوجد ما يلي:

(١) احتمال ظهور كل وجه من الأوجه الستة.

(٢) إذا كان أ: الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي أوجد احتمال الحدث أ.

الحل: (١) لنفترض بأن $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6)$ وبالتالي فإن:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$$

ومنها $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$.

وعندئذ:

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, P(A_2) = \frac{1}{6}, P(A_3) = \frac{1}{6}, P(A_4) = \frac{1}{6}, P(A_5) = \frac{1}{6}, P(A_6) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (١٧): إذا كانت A_1, A_2 أم حوادث متباعدة وشاملة في Ω بحيث أن

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{4}, P(A_3) = \frac{1}{8}$$

أوجد $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$.

الحل: لنفترض بأن $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$ ومنها

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, P(A_2) = \frac{1}{6}, P(A_3) = \frac{1}{6}$$

(٦-٦) الاحداث المشروطة واحتمالها:

(Conditional Events & Probability) :

تعريف: لنفرض بأن ي أي حدث في الفضاء العيني Ω بحيث $P(A) > 0$ وبالتالى

$$P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1$$

نظرية: لنفترض بأن Ω فضاء عيني منته وأن A و B حدثان فإن:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{عدد العناصر في } A \cap B}{\text{عدد العناصر في } B}$$

مثال (١٨)، نفترض بأننا ألقينا حجرى نرد إذا كان المجموع يقبل القسمة على ٣ فأوجد احتمال أن يكون أحد الحجرين هو العدد ٣.

الحل: ليكن $A = \{ \text{المجموع يقبل القسمة على ٣} \} = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (3, 6), (6, 6) \}$.

$B = \{ \text{ظهور العدد ٣ في حجر واحد على الأقل} \}$

$$B = \{ (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5), (6, 3), (3, 6) \} = \{ (3, 5), (3, 6) \}.$$

$$A \cap B = \{ (3, 3), (3, 6), (6, 3) \}.$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{\text{عدد العناصر في } A \cap B}{\text{عدد العناصر في } B} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (١٩)، ليكن A و B حدثين في Ω بحيث أن $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \text{ أوجد:}$$

$$(١) P(A|B), (٢) P(A \cap B), (٣) P(A \cup B).$$

$$(٤) P(\overline{A} | \overline{B}), (٥) P(\overline{A} | B), (٦) P(A | \overline{B}).$$

$$(٧) P(\overline{A} | A).$$

الحل: (١) $C(B) = \frac{C(B \cap A)}{C(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{(b \cap I)_c}{(I)_c} = (f/b)_c(2)$$

$$(b \cap f) \text{ ح} - (b) \text{ ح} + (f) \text{ ح} = (b \cup f) \text{ ح} \quad (3)$$

$$\frac{v}{12} = \frac{3-1+1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{o}{\lambda} = \frac{\frac{o}{y}}{\frac{y}{\lambda}} = \frac{\frac{y}{y} - 1}{\frac{y}{y} - 1} = \frac{(\overline{y}U)_{\mathcal{C}} - 1}{(\overline{y})_{\mathcal{C}} - 1} = \frac{(\overline{y}U)_{\mathcal{C}}}{(\overline{y})_{\mathcal{C}}} = \frac{(\overline{y} \cap \overline{T})_{\mathcal{C}}}{(\overline{y})_{\mathcal{C}}} = (\overline{y}/\overline{T})_{\mathcal{C}} \quad (2)$$

$$= \frac{(\overline{bU})_c^{-1}}{(1)_c^{-1}} = \frac{(\overline{bU})_c}{(\overline{1})_c} = \frac{(\overline{1 \cap \overline{b}})_c}{(\overline{1})_c} = -(\overline{1/\overline{b}})_c \quad (6)$$

$$\frac{0.7}{7} = \frac{\frac{0}{7}}{1} = \frac{\frac{7}{7} - 1}{1} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{(\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon - (\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon}{(\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon} = \frac{(\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon}{(\frac{1}{\varepsilon})\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon$$

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{y})}{(\frac{1}{y}) \cdot (\frac{1}{y})} = \frac{(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{y})}{(\frac{1}{y})} = (\frac{1}{x}) \cdot (\frac{1}{y})$$

مثال (٢٠)، في إحدى الجامعات إذا كانت نسبة الذين يتحدثون الإنجليزية ٣٠٪ والذين يتحدثون الفرنسية ٢٠٪ ويتحدثون اللغتين معاً ١٠٪ اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي:

(١) ما احتمال أن يتحدث الإنجليزية إذا كان يتحدث الفرنسية.

(٢) إذا كان لا يتحدث الفرنسية فما احتمال أن يتحدث الإنجليزية.

(٣) إذا كان يتحدث الفرنسية فما احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية.

(٤) ما هو احتمال أن يكون يتحدث إحدى اللغتين على الأقل.

الحل: نفرض بأن أ: طالب يتحدث الإنجليزية \Leftarrow ح (أ) = ٠,٣

ب: طالب يتحدث الفرنسية \Leftarrow ح (ب) = ٠,٢

أ ∩ ب: طالب يتحدث اللغتين معا \Leftarrow ح (أ ∩ ب) = ٠,١

$$\text{ح (أ / ب)} = \frac{\text{ح (أ ∩ ب)}}{\text{ح (ب)}} = \frac{٠,١}{٠,٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ح (أ / \bar{ب})} = \frac{\text{ح (أ ∩ \bar{ب})}}{\text{ح (\bar{ب})}} = \frac{\text{ح (أ) - ح (أ ∩ ب)}}{\text{ح (ب) - ح (أ ∩ ب)}} = \frac{٠,٣ - ٠,١}{٠,٢ - ٠,١} = \frac{٠,٢}{٠,١} = ٢$$

$$\text{ح (ب / \bar{أ})} = \frac{\text{ح (ب ∩ \bar{أ})}}{\text{ح (\bar{أ})}} = \frac{\text{ح (ب) - ح (أ ∩ ب)}}{\text{ح (أ) - ح (أ ∩ ب)}} = \frac{٠,٢ - ٠,١}{٠,٣ - ٠,١} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ح (أ ∪ ب)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ب)} - \text{ح (أ ∩ ب)} = ٠,٣ + ٠,٢ - ٠,١ = ٠,٤$$

نظرية: إذا كان أ، ب حدثين في Ω فإن ح (أ ∩ ب) = ح (أ / ب) . ح (ب)

نظرية بييز: Baye's Theorem

ليكن ي أي حدث في الفضاء العيني Ω بحيث أن ح (ي) > صفر. وكانت

أ_١, أ_٢, ..., أ_ن أحداث متباعدة وشاملة في Ω فإن:

$$ي = (ي ∩ أ_١) ∪ ... ∪ (ي ∩ أ_n)$$



$$\text{ح (ي)} = \text{ح (ي ∩ أ_١)} + ... + \text{ح (ي ∩ أ_n)}$$

$$\text{ح (ي)} = \text{ح (أ_١ / ي)} \cdot \text{ح (ي)} + ... + \text{ح (أ_n / ي)} \cdot \text{ح (ي)}$$

وتسمى المعادلة (١) بالنظرية التمهيلية لبييز.

$$\text{ح (أ_١ / ي)} = \frac{\text{ح (أ_١ ∩ ي)}}{\text{ح (ي)}} = \frac{\text{ح (أ_١) \cdot \text{ح (ي / أ_١)}}}{\text{ح (ي)}} \quad (٢)$$

لكل $r = 1, 2, \dots, n$

وتسمى المعادلة (٢) بنظرية بيز.

مثال (٢١): تطبع ثلاثة طابعات أ، ب، ح في مكتب للسكربتريا على التوالي ٣٠٪، ٥٠٪، ٢٠٪ من الرسائل المطبوعة إذا كان احتمال وجود خطأ مطبعي واحد على الأقل في الرسائل للطابعات أ، ب، ح على التوالي هي ٣٪، ٦٪، ٤٪ اختيرت إحدى الرسائل بطريقة عشوائية.

(١) أوجد احتمال أن يكون بها خطأ مطبعي واحد على الأقل.

(٢) إذا علمت بأن الرسالة يوجد بها خطأ فما احتمال أن تكون من طباعة أ.

الحل، أ: الرسالة من طباعة أ \Leftarrow ح (أ) = ٠,٣.

أ: الرسالة من طباعة ب \Leftarrow ح (ب) = ٠,٥.

أ: الرسالة من طباعة ح \Leftarrow ح (ح) = ٠,٢.

ي: وجود خطأ مطبعي واحد على الأقل.

ح (ي / أ) = ٠,٣، ح (ي / ب) = ٠,٦، ح (ي / ح) = ٠,٤

(١) ح (ي) = ح (أ) ح (ي / أ) + ح (ب) ح (ي / ب) + ح (ح) ح (ي / ح)

$$= ٠,٣ \times ٠,٣ + ٠,٥ \times ٠,٦ + ٠,٢ \times ٠,٤$$

$$= ٠,٠٩ + ٠,٣٠ + ٠,٠٨ = ٠,٤٧$$

$$(٢) \text{ ح (أ / ي) } = \frac{\text{ح (أ) ح (ي / أ)}}{\text{ح (ي)}} = \frac{٠,٣ \times ٠,٣}{٠,٤٧} = \frac{٠,٠٩}{٠,٤٧} = \frac{٩}{٤٧}$$

مثال (٢٢): لدينا ثلاثة صناديق: في الصندوق I ٧ كرات حمراء و ٣ زرقاء وفي الصندوق

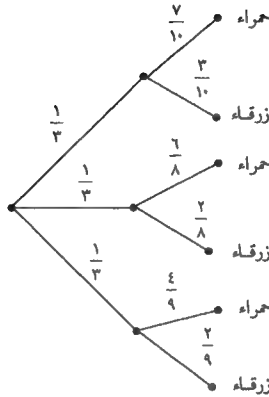
II ٦ حمراء و ٢ زرقاء وفي الصندوق III * حمراء و ٤ زرقاء اختير احد

الصناديق بشكل عشوائي ثم اختيرت منه كرة ما احتمال أن تكون حمراء.

الحل، في عملية الاختيار هذه فإن عملية السحب تتم على مرحلتين وهي أولاً

عملية اختيار الصندوق و ثم عملية اختيار الكرة وفي هذا المثال ستقوم برسم

شجرة الاحتمال كالتالي:



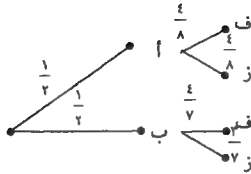
$$\begin{aligned} \therefore \text{احتمال أن تكون الكرة حمراء} &= \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \\ &= \frac{5}{27} + \frac{7}{24} + \frac{7}{30} = \\ &= \frac{311}{540} = \frac{5}{27} + \frac{1}{4} + \frac{7}{30} = \end{aligned}$$

مثال (٢٣)، يحتوي صندوق أ على ثمانية ورقات مرقمة من ١ إلى ٨ ويحتوي الصندوق ب على أربعة أوراق مرقمة من ١ إلى ٧ اختير أحد الصناديق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة إذا كان رقم الورقة المسحوبة فردياً فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق ب.

الحل، لنرمز للعدد الفردي بالرمز (ف) وللعدد الزوجي بالرمز (ز) والمطلوب في هذا المثال هو ح (ب / ف).

يوجد مسارات للعدد الفردي إذا

$$\text{ح (ف)} = \frac{10}{28} = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$



ح (ب ∩ ف) = احتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الصندوق ب

$$\text{ومكتوب عليها عدد فردي} = \frac{4}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8}$$

$$\therefore \text{ح (ب / ف)} = \frac{\text{ح (ب ∩ ف)}}{\text{ح (ف)}} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

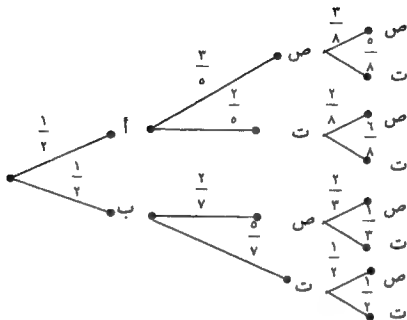
مثال (٢٤): لدينا صندوقان كما يلي:

الصندوق أ به ٣ مصابيح صالحة و ٢ مصابيح تالفة.

الصندوق ب به ٢ مصابيح صالحة و ٥ مصابيح تالفة.

اختير صندوق بطريقة عشوائية ثم سحب منه مصباح ووضع في الصندوق الآخر وبعد ذلك سحب مصباح من الصندوق الثاني أوجد احتمال أن يكون كلا المصباحين صالحين.

الحل: لنرمز للمصباح الصالح بالرمز (ص) وللمصباح التالف بالرمز (ت) سنكون شجرة الاحتمال كالآتي:



وهكذا فإنه يوجد مساران للحصول على مصباحين صالحين

$$\text{الاحتمال} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = 0,20\bar{7}$$

(٧-٦) الاحداث المستقلة واحتمالها:

(Independence Events and it's Probability):

تعريف: نقول بأن الحدثين أ، ب مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يتأثر بوقوع

الآخر وهذا يعني بأن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

مثال (٢٥)، إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,9$ ،

ح $P(A \cup B) = 0,94$ ، فهل أ، ب حدثين مستقلين؟

الحل: سنقوم أولاً بإيجاد $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= 0,4 + 0,9 - 0,94 = 0,36$$

$$\text{الآن: ح } P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$$

وبما أن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ فإن أ، ب حدثين مستقلين.

ملاحظة: إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في Ω فإن:

$$(١) \text{ أ، ب حدثين مستقلين وإن } P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

$$(٢) \text{ أ، ب حدثين مستقلين وإن } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}).$$

(٣) \bar{A}, \bar{B} حدثين مستقلين وإن $H = (A \cap B) = H \times (\bar{A})$ (ب).

(٤) $H = (B) = H$ (أ).

(٥) $H = (B) = H$ (ب).

مثال (٢٦): تقدم طالبين لامتحان في اللغة الإنجليزية فإذا كان احتمال نجاح الأول في الامتحان = ٠,٦ واحتمال نجاح الثاني في الامتحان = ٠,٧ أوجد ما يلي:

(١) احتمال نجاح الطالبين معاً

(٢) احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

(٣) احتمال عدم نجاح الطالب الثاني.

(٤) احتمال نجاح الأول وعدم نجاح الثاني.

(٥) احتمال عدم نجاحهما معاً.

(٦) احتمال عدم نجاح الأول وعدم نجاح الثاني.

(٧) احتمال نجاح الأول علماً بأن الثاني لم ينجح.

الحل: ليكن أ: نجاح الطالب الأول في الامتحان $\Leftrightarrow H = (A) = ٠,٦$

ب: نجاح الطالب الثاني في الامتحان $\Leftrightarrow H = (B) = ٠,٧$

أ، ب حدثين مستقلين.

(١) $H = (A \cap B) = H \times H = ٠,٦ \times ٠,٧ = ٠,٤٢$

(٢) $H = (A \cup B) = H \times H + H - H = ٠,٦ + ٠,٧ - ٠,٤٢ = ٠,٨٨$

(٣) $H = (\bar{B}) = ١ - H = ١ - ٠,٧ = ٠,٣$

(٤) $H = (A \cap \bar{B}) = H \times H = ٠,٦ \times ٠,٣ = ٠,١٨$

(٥) $H = (\overline{A \cap B}) = ١ - H = ١ - ٠,٤٢ = ٠,٥٨$

(٦) $H = (A \cap B) = H \times H = ٠,٦ \times ٠,٣ = ٠,١٨$

(٧) $H = (B) = H = ٠,٦$

(٨-٦) المتغيرات العشوائية: (Random Variables)

تعريف: المتغير العشوائي ق هو اقتران معرف على الفضاء العيني Ω ومداها مجموعة

جزئية من الأعداد الحقيقية.

أي أن ق: $\Omega \rightarrow$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (٢٧)، لتكن التجربة رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين إذا ط المتغير العشوائي ق على عدد الصور الظاهرة أوجد مدى ق.

الحل: الفضاء العيني لهذه التجربة = $\Omega = \{ص ص، ص ك، ك ص، ك ك\}$ الآن المتغير العشوائي ق يربط كل عنصر من عناصر Ω بعدد حقيقي (عدد الصور) فنلاحظ:

ص ص \leftarrow ٢ أي ق (ص ص) = ٢ (عدد الصور = ٢).

ص ك \leftarrow ١ أي ق (ص ك) = ١ (عدد الصور = ١).

ك ص \leftarrow ١ أي ق (ك ص) = ١ (عدد الصور = ١).

ك ك \leftarrow صفر أي ق (ك ك) = ١ صفر (عدد الصور = صفر).

فنلاحظ بأن مدى ق = $\{٢، ١، صفر\}$.

تعريف: ليكن ق متغيراً عشوائياً معرفاً على الفضاء العيني Ω بحيث أن مدى ق = $\{س_١، س_٢، ...، س_n\}$ فإن دالة التوزيع ق تحقق الشروط التالية:

(١) ح (س_١) \leq صفر لكل $ر = ١، ٢، ...، ن$.

(٢) ح (س_١) + ح (س_٢) + ... + ح (س_ن) = ١

نظرية: (١) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

س _١	س _٢	س _ن
ح (س _١)	ح (س _٢)		ح (س _ن)

(٢) التوقع للمتغير العشوائي ق = ت (ق).

$$= س_١ \times ح (س_١) + ... + س_n \times ح (س_n)$$

$$= \text{الوسط الحسابي (للـ).}$$

(٣) إذا كان أ، ب أعداد حقيقية فإن:

$$ت (أ ق + ب) = أ ت (ق) + ب$$

(٤) التباين للمتغير العشوائي ق = تباين ت (ق) - (ت (ق))².

$$(٥) \text{ الانحراف المعياري لـ ق} = \sqrt{\text{تباين ق}}$$

مثال (٢٨)، ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين إذا ط المتغير العشوائي س على الفرق المطلق بين العددين الظاهرين أوجد:

(١) ملى س (٢) التوزيع الاحتمالي لـ س (٣) التوقع للمتغير س
(٤) تبا س (٥) الانحراف المعياري لـ س.
الحل: الفضاء العيني لهذه التجربة = $\{(١, ١), (١, ٢), \dots, (٦, ٦)\}$.

وعدد عناصر $\Omega = ٣٦$ زوج مرتب.

(١) ملى س = $\{(١, ١), (١, ٢), (١, ٣), (١, ٤), (١, ٥), (١, ٦)\}$.

(٢) قبل تكوين التوزيع الاحتمالي لـ س سنقوم بحساب الاحتمالات كالآتي:

$$\text{ح (س = صفر)} = \text{ح } \{(١, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٦, ٦)\} = \frac{٦}{٣٦}$$

$$\text{ح (س = ١)} = \text{ح } \{(١, ٢), (٢, ١), (٢, ٣), (٣, ٢), (٣, ٤), (٤, ٣), (٤, ٥), (٥, ٤)\}$$

$$= \frac{١٠}{٣٦} = \text{ح } \{(٥, ٦), (٦, ٥), (٤, ٥)\}$$

$$\text{ح (س = ٢)} = \text{ح } \{(١, ٣), (٣, ١), (٢, ٤), (٤, ٢), (٣, ٥), (٥, ٣), (٤, ٦), (٦, ٤)\}$$

$$= \frac{٨}{٣٦} = \text{ح } \{(٤, ٦)\}$$

$$\text{ح (س = ٣)} = \text{ح } \{(١, ٤), (٤, ١), (٢, ٥), (٥, ٢), (٣, ٦), (٦, ٣)\}$$

$$\text{ح (س = ٤)} = \text{ح } \{(١, ٥), (٥, ١), (٢, ٦), (٦, ٢)\}$$

$$\text{ح (س = ٥)} = \text{ح } \{(١, ٦), (٦, ١)\} = \frac{٢}{٣٦}$$

∴ التوزيع الاحتمالي هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ح (س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

$$(٣) \text{ توقع س} = \text{ت (س)} = ٠ \times \frac{٦}{٣٦} + ١ \times \frac{١٠}{٣٦} + ٢ \times \frac{٨}{٣٦} + ٣ \times \frac{٦}{٣٦} + ٤ \times \frac{٤}{٣٦} + ٥ \times \frac{٢}{٣٦}$$

$$= \frac{٢}{٣٦} \times ٥ + \frac{٤}{٣٦}$$

$$= \frac{٧٠}{٣٦} = \frac{١٠+١٦+١٨+١٦+١٠}{٣٦}$$

$$(٤) \text{ تباين } = \text{ت (س)} - (\text{ت (س)})^2$$

$$\begin{aligned} \text{ت (س)} &= \text{ت}(٠) \times \frac{٦}{٣١} + \text{ت}(١) \times \frac{١٠}{٣١} + \text{ت}(٢) \times \frac{٨}{٣١} + \text{ت}(٣) \times \frac{٦}{٣١} + \text{ت}(٤) \times \frac{٢}{٣١} + \frac{٤}{٣١} \times \\ &= \frac{١٠}{٣١} + \frac{١٠}{٣١} + \frac{١٦}{٣١} + \frac{٢٢}{٣١} + \frac{١٠}{٣١} + ٠ = \frac{٦٨}{٣١} \\ \therefore \text{تباين} &= \frac{٦٨}{٣١} - \left(\frac{٧٠}{٣١}\right)^2 = \frac{٤٩٠٠}{١٢٩٦} - \frac{٢١٠}{٣١} = \frac{٣٦٠}{١٢٩٦} \\ (٥) \text{ الانحراف المعياري لـ س} &= \sigma = \sqrt{\text{تباين}} = \sqrt{\frac{٣٦٠}{١٢٩٦}} \end{aligned}$$

مثال (٢٩): يربح تاجر للبطونة في الأيام الحارة (١٠) دينار وفي الأيام الماطرة يخسر (١٥) دينار وفي أيام الأعياد والمناسبات يربح (٢٠) دينار إذا علمت بأن نسبة الأيام الحارة (٥٠%) والأيام الماطرة (٤٠%) والأعياد (١٠%) اختير إحدى الأيام بشكل عشوائي أوجد توقع ربحه في ذلك اليوم.

الحل: سنعمل أولاً على تكوين جدول التوزيع الاحتمالي:

س	١٠	-١٥	٢٠
ح (س)	٠,٥٠	٠,٤٠	٠,١٠

$$\therefore \text{توقع الربح} = ١٠ \times ٠,٥٠ + (-١٥) \times ٠,٤٠ + ٢٠ \times ٠,١٠ =$$

$$= ٥ - ٦ + ٢ = ١ \text{ دينار واحد}$$

(٦-٩) توزيع ذات الحدين (Binomial Distribution):

في كثير من التجارب تكون النتيجة فيها إما نجاح أو فشل ويتم تكرار مثل هذه التجربة، فمثلاً عند رمي قطعة نقد تكون النتيجة إما صورة أو كتابة وتكون نتيجة التجربة مستقلة عن نتيجة أي تجربة أخرى.

وعلى هذا فإن تجربة ذات الحدين هي كل تجربة تتمتع بالخواص التالية:

(١) نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.

(٢) نتيجة كل محاولة مستقلة عن أية محاولة أخرى.

(٣) احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وليكن (ب) فإن احتمال الفشل يساوي (١ - ب).

(٤) تجري التجربة عدداً معيناً من المرات وليكن (ن).

لنفرض س تمثل عدد النجاح في المحاولات (ن) فإن س متغير ذات الحدين والتوزيع الاحتمالي لـ س يسمى توزيع ذات الحدين.

الدالة الاحتمالية لمتغير ذات الحدين ونرمز له بالرمز

$$\text{حد (س؛ ن، ب) = ح (س = س) = } \binom{ن}{س} (ب)^س (١ - ب)^{ن-س}$$

حيث س = صفر، ١، ... ، ن.

مثال (٣٠): إذا كان احتمال الحصول على قطعة معينة في إنتاج آلة (٠,٢٠) فما احتمال أن نحصل على:

(١) عدم وجود قطعة معينة في (١٠) قطع مختارها بشكل عشوائي.

(٢) الأكثر على قطعة واحدة معينة من بين (٢٠) قطعة مختارها بشكل عشوائي.

الحل: (١) يتضح من المعطيات بأن: ن = ١٠، ب = ٠,٢٠.

$$\text{والمطلوب: ح (س = صفر) = } \binom{١٠}{صفر} (٠,٢٠)^صفر (٠,٨٠)^{١٠-صفر} = ٠,١٠٧٣$$

(٢) ن = ٢٠، ب = ٠,٢٠.

والمطلوب: ح (س ≤ ١) = ١ - ح (س = صفر).

$$\text{ح (س = صفر) = } \binom{٢٠}{صفر} (٠,٢٠)^صفر (٠,٨٠)^{٢٠-صفر} = ٠,٠١١$$

$$\therefore \text{ح (س ≤ ١) = ١ - ٠,٠١١ = ٠,٩٨٩}$$

مثال (٣١): رميت حجر نرد منتظمة (٤) مرات ما احتمال عدم ظهور (٤) فيها؟

الحل: إن احتمال ظهور (٤) عند رمي حجر نرد مرة واحدة = $\frac{1}{6}$ وعدم الظهور = $\frac{5}{6}$

$$\therefore \text{ح (س = صفر) = } \binom{٤}{صفر} \left(\frac{1}{6}\right)^صفر \left(\frac{5}{6}\right)^{٤-صفر} = \frac{٦٢٥}{١٢٩٦}$$

نظرية: إذا كان s متغير ذات الحدين فإن:

$$(١) \text{ التوقع الرياضي لـ } s = \mu = t = n \times p$$

$$(٢) \text{ تباين لـ } s = n \times p \times (١ - p)$$

مثال (٣٢)، أسرة بها (٦) أطفال إذا ط المتغير العشوائي s على عدد الأطفال الذكور في الأسرة أوجد ما يلي:

$$(١) \text{ احتمال أن لا يكون عند الأسرة أي طفل ذكر.}$$

$$(٢) \text{ احتمال أن يكون عند الأسرة ٣ أطفال ذكور.}$$

$$(٣) \text{ احتمال أن يكون عند العائلة على الأقل خمس أطفال ذكور.}$$

$$(٤) \text{ توقع عدد الأطفال الذكور في العائلة.}$$

$$(٥) \text{ تباين عدد الذكور في العائلة.}$$

$$(٦) \text{ احتمال أن يكون عدد البنات أقل من عدد الذكور في العائلة.}$$

الحل، يتضح بأن هذه التجربة هي تجربة ذات الحدين وأن $n = ٦$.

$$\frac{1}{2} = \text{احتمال النجاح} = \text{احتمال الحصول على طفل ذكر}$$

$$\frac{1}{2} = \text{احتمال الفشل} = \text{احتمال الحصول على طفل أنثى}$$

$$\text{والدالة الاحتمالية لهذا المتغير حد (س؛ ن، ب) = } \binom{6}{s} (p)^s (1-p)^{n-s}$$

حيث $s = \text{صفر، ١، ...، ٦}$.

$$(١) \text{ ح (س = صفر) = } \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$(٢) \text{ ح (س = ٣) = } \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64}$$

$$(٣) \text{ ح (س} \geq ٥) = ١ - \text{ح (س} < ٥) = ١ - \text{ح (س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥)}$$

$$= 1 - \left[\binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \right]$$

$$(٤) \text{ ت (س) = } n \times p = ٦ \times \frac{1}{2} = ٣$$

$$(٥) \text{ تباين } = ن \times ب \times ١ - ب = \frac{٣}{٧} = \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٧} \times ٦ = ٦ - ب$$

(٦) يكون عدد البنات أقل من عدد الذكور إذا كان عدد الذكور يساوي ٤ أو ٥ أو ٦.

وبالتالي فلاحتمال المطلوب = ح (س = ٤) + ح (س = ٥) + ح (س = ٦)

$$= \binom{٦}{٤} \left(\frac{١}{٧}\right)^4 \left(\frac{٦}{٧}\right) + \binom{٦}{٥} \left(\frac{١}{٧}\right)^5 \left(\frac{٦}{٧}\right) + \binom{٦}{٦} \left(\frac{١}{٧}\right)^6 \left(\frac{٦}{٧}\right) =$$

$$= \frac{٢٢}{٦٤} = \frac{١}{٦٤} + \frac{٦}{٦٤} + \frac{١٥}{٦٤}$$

(٦-١٠) مسائل محلولة:

مسألة (١): سحبت ورقة بطريقة عشوائية من بين (٥٠) ورقة مرقمة بالأعداد من ١ إلى ٥٠ أوجد احتمال أن يكون العدد المسحوب.

(١) يقبل القسمة على ٥ (٢) أولي (٣) ينتهي بالرقم ٢

الحل: (١) ليكن أ: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب يقبل القسمة على ٥.

وبالتالي فإن عدد العناصر $A = ١٠$. وعدد عناصر $\Omega = ٥٠$.

$$\text{وعليه فإن } ح(A) = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$$

(٢) ليكن ب: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب عدد أولي.

$$B = \{٢, ٣, ٥, ٧, ١١, ١٣, ١٧, ١٩, ٢٣, ٢٩, ٣١, ٣٧, ٤١, ٤٣, ٤٧\}$$

$$ح(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣}{١٠}$$

(٣) ليكن ج: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب ينتهي بالرقم ٢.

$$C = \{٢, ١٢, ٢٢, ٣٢, ٤٢\}$$

$$ح(C) = \frac{٥}{٥٠} = \frac{١}{١٠}$$

مسألة (٢): بفصل دراسي (١٠) طالبات ٣ منهن عيونهن زرقاء اختيرت طالبتان

بطريقة عشوائية أوجد احتمال أن يكون:

(٢) عيون الطالبتين ليس زرقاء.

(١) عيون الطالبتين زرقاء.

(٣) على الأقل طالبة واحدة عيناها زرقاء.

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{40} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}} = \text{الاحتمال المطلوب (١)}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{21}{40} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}} = \text{الاحتمال المطلوب (٢)}$$

(٣) الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون طالبة واحدة عيونها زرقاء + احتمال أن تكون طالبتين عيونهما زرقاء.

$$\frac{8}{10} = \frac{24}{40} = \frac{3}{40} + \frac{21}{40} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}} + \frac{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}} =$$

مسألة (٣): من بين (٢٤٠) طالباً يدرس الإنجليزية ١٢٠ طالب وإيطالية (١٠٠) طالب ويدرس اللغتين معاً (٤٠) طالب اختيار طالب بشكل عشوائي أوجد احتمال أن يكون هذا الطالب:

(١) يدرس الإنجليزية أو الإيطالية.

(٢) أن لا يكون يدرس الإنجليزية ولا الإيطالية.

$$\frac{1}{2} = \frac{120}{240} = \text{ح (أ)} = \text{طالب يدرس الإنجليزية} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{12} = \frac{100}{240} = \text{ح (ب)} = \text{طالب يدرس الإيطالية} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6} = \frac{40}{240} = \text{ح (أ} \cap \text{ب)} = \text{طالب يدرس اللغتين معاً} \Leftrightarrow$$

$$\text{ح (أ} \cup \text{ب)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ب)} - \text{ح (أ} \cap \text{ب)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{120 - 40 + 100}{240} = \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} =$$

$$(2) \text{ ح } (\bar{A} \cap \bar{B}) = \text{ ح } (\overline{A \cup B}) = 1 - \text{ ح } (A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

مسألة (٤)، إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث

$$\text{ح } (A \cup B) = \frac{5}{8}, \text{ ح } (A \cap B) = \frac{1}{4}, \text{ ح } (\bar{A}) = \frac{5}{8} \text{ أوجد:}$$

$$(3) \text{ ح } (A \cap B)$$

$$(1) \text{ ح } (A) \quad (2) \text{ ح } (B)$$

$$\text{الحل، (1) ح } (A) = 1 - \text{ ح } (\bar{A}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$(2) \text{ ح } (A \cup B) = \text{ ح } (A) + \text{ ح } (B) - \text{ ح } (A \cap B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \text{ ح } (B) - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ ح } (B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ ح } (A \cap B) = \text{ ح } (A) + \text{ ح } (B) - \text{ ح } (A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$

مسألة (٤)، يلعب أريك وبتير وجوني ومارك في ورق اللعب (الشلة) أخذ كل منهم ورقة من الشلة. (١٣)

(١) إذا لم يكن عند بتير أي أس فما هو الاحتمال أن يكون عند زميل بتير ٢ أس بالضبط.

(٢) إذا كان عند أريك وبتير معاً ٩ ورقات يستوني فأوجد الاحتمال أن يكون عند

جوني ومارك ورقتي يستوني.

الحل، (١) توجد (٣٩) ورقة من بينها (٤) أس موزعة بين بتير وجوني ومارك وتوجد

$$\binom{39}{13} \text{ طريقة يمكن أن يأخذ بها جوني (١٣) ورقة من بين ٣٩ ورقة ويوجد } \binom{4}{2}$$

طريقة يمكن أن يأخذ جوني بها (٢) أس من بين (٤) أس و $\binom{35}{11}$ طريقة يمكن أن

يأخذ بها ١١ ورقة من بين (٣٥) ورقة ليس منها أس وبالتالي فإن الاحتمال المطلوب:

$$\frac{\frac{135}{13411} \times 6}{\frac{135 \times 11 \times 17 \times 18 \times 19}{13113}} = \frac{\binom{35}{11} \binom{4}{2}}{\binom{39}{13}} =$$

$$\frac{20 \times 36 \times 12 \times 13 \times 6}{36 \times 37 \times 38 \times 39} = \frac{235213 \times 6}{235211 \times 37 \times 38 \times 39 \times 36} = \frac{70}{21.9} = \frac{7.8400}{1976.24}$$

(٢) توجد (٣٦) ورقة من بينها (٤) ورقات بستوني موزعة بين جوني ومارك توجد

$\binom{4}{2}$ طريقة يمكن أن يأخذ بها جوني مثلاً (١٣) ورقة وتوجد $\binom{4}{2}$ طريقة يمكن

أن يأخذ بها جوني ورقتي بستوني من بين (٤) ورقات بستوني و $\binom{3}{1}$ طريقة

يمكنه أن يأخذ ١١ ورقة لا يوجد بها أي ورقة بستوني من بين (٢٢) ورقة إذا

$$\frac{33}{570} = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{\binom{36}{2}} \text{ فالاحتمال المطلوب يساوي}$$

مسألة (٥)، إذا كان ح (١) = $\frac{3}{4}$ ، ح (١/ح) = $\frac{1}{3}$ ، ح (ح/١) = $\frac{1}{4}$ أوجد:

(١) ح (ح) (٢) ح (١/ح).

$$\text{الحل: (١) ح (١/ح) = } \frac{(1 \cap \text{ح})}{(1)} = \frac{(1 \cap \text{ح})}{(1)} \leftarrow \text{ح (١/ح) = ح (١) ح (١/ح)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{(1 \cap \text{ح}) - (\text{ح})}{(1) - 1} = \frac{(\overline{1} \cap \text{ح})}{(\overline{1})} = \text{ح (ح/١)}$$

$$\frac{\frac{1}{4} - (\text{ح})}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - (\text{ح})}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ح (ح) = } \frac{0}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{z}{0} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{\left(\frac{-n!}{z}\right)}{\left(\frac{-1}{z}\right)} = (-1) z^{(n)}$$

مسألة (٦)، وجد أن (١،٤) من المراجعين في عيلة ما يشكون من ارتفاع في ضغط الدم وأن (١،٢) من المراجعين مصابون بمرض في الكبد وأن (١،١) يشكون من المرضين معاً. ما احتمال أن أحد المراجعين يشكو من أحد المرضين على الأقل هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان؟

الحل، أ: مريض يعاني من ارتفاع في ضغط الدم \Rightarrow ح (أ) = ٠,٤

ب: مريض يعاني من مرض في الكبد \Leftarrow ح (ب) - ٠,٢

$A \cap B$: مريض يعاني من المرضين معاً $\Leftrightarrow C = (A \cap B) = (B, A)$

المطلوب: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$

بما أن $P(A \cap B) = 0.1 \neq P(A) \times P(B)$ فإن المرضين ليس مستقلان.

مسألة (٧): ترسل الإشارات اللاسلكية على شكل نقاط وخطوط حيث عدد النقاط

٣ = عدد الخطوط وبسبب الأخطاء فإن النقطة تصبح خطأً باحتمال $\frac{2}{3}$

والخط يصبح نقطة باحتمال $\frac{1}{4}$.

(١) ما احتمال استلام إشارة نقطة؟

(٢) إذا استلمت إشارة نقطة فما احتمال أنها أرسلت نقطة؟

الحل، لنفترض بأن عدد الخطوط = س ، عدد النقاط = $\frac{3}{4}$ س

$$\frac{x}{y} = 5 \Leftrightarrow 1 = 5 \cdot \frac{y}{x} \Leftrightarrow 1 = 5 \cdot \frac{3}{x} + 5 \therefore$$

لتكن أ: إرسال إشارة على شكل نقطة \Leftarrow ح (1) $\frac{3}{v}$

ب: إرسال إشارة على شكل خط \Leftarrow ح (ب) $= \frac{x}{y}$

ي: استلام إشارة نقطة.

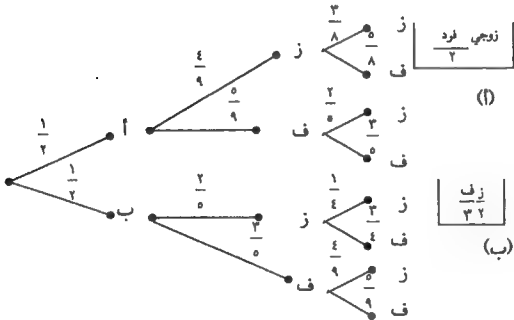
$$\frac{1}{4} = \text{ح (ى/ب)} , \quad \frac{1}{3} = \text{ح (ى/أ)}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \text{ح (ى/ب)} \cdot \text{ح (ب)} + \text{ح (ى/أ)} \cdot \text{ح (أ)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{\text{ح (أ)} \cdot \text{ح (أ)}}{\text{ح (ى)}} = \text{ح (ى/أ)}$$

مسألة (٨)، بالصندوق أ (٩) ورقات مرقمة من ١ إلى ٩ وبالصندوق ب ٥ ورقات مرقمة من ١ إلى ٥ اختير صندوق بشكل عشوائي ثم سحبت منه ورقة إذا كان الرقم المسحوب زوجياً فإننا نسحب ورقة أخرى من نفس الصندوق وإذا كان الرقم المسحوب فردياً فإننا نسحب ورقة من الصندوق الآخر.

- (١) ما هو احتمال أن يكون الرقمان المسحوبان زوجيين؟
 (٢) إذا كان الرقمان المسحوبان زوجيان فما هو احتمال أن يكون الصندوق أ هو المختار.
 (٣) ما هو احتمال أن يكون الرقمان المسحوبان فرديين؟
 الحل: نرسم أولاً شجرة الاحتمال التي تمثل الحل كالتالي:



(١) هنالك مساران يعطيان عدداً زوجيان وبالتالي فلاحتمال المطلوب يساوي:

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}$$

(٢) باستخدام نظرية بيز فاللطلب ح (أ/ز ز) :

$$\frac{0}{8} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{10}} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{10}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{10}\right)} =$$

$$\frac{0}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{0}{9} \times \frac{1}{2} = \text{ح (ف ف)} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$$

مسألة (٩)، بفرض أن أ و ب حدثين مستقلين في Ω وأن

$$\text{ح (ف)} = \frac{1}{4}, \text{ح (ب)} = \frac{2}{3} \text{ أوجد ما يلي:}$$

$$\text{(١) ح (ب).}$$

$$\text{(٢) ح (ب/ف).}$$

$$\text{(٣) ح (ف/ب).}$$

الحل، بما أن أ و ب مستقلان فإن ح (ب ∩ ف) = ح (ف) . ح (ب)

$$\Leftrightarrow \text{ح (ب ∩ ف)} = \text{ح (ب)} + \text{ح (ف)} - \text{ح (ب ∪ ف)} \text{ ح (ب)}$$

$$\therefore \text{ح (ب ∩ ف)} = \text{ح (ب)} + \text{ح (ف)} - \text{ح (ب ∪ ف)}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \text{ح (ب)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \text{ح (ب)} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \text{ح (ب/ف)} = \text{ح (ف)}$$

$$\frac{1}{2} = \text{ح (ف/ب)} = \text{ح (ب)}$$

مسألة (١٠)، صندوق يحتوي على أربع كرات حمراء وخمس كرات صفراء سحبت عينة مكونة من ثلاثة كرات على التوالي مع الإرجاع إذا دل المتغير العشوائي S على عدد الكرات الحمراء في العينة أوجد ما يلي:

(١) احتمال عدم الحصول على أي كرة حمراء في العينة.

(٢) احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء.

(٣) احتمال الحصول على كرتين حمراوين.

(٤) احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء.

(٥) أوجد مدى المتغير S .

(٦) أوجد التوزيع الاحتمالي لـ S .

(٧) التوقع لـ S .

(٨) التباين لـ S .

الحل، بما أن السحب مع الإرجاع فإن التجربة تجربة ذات الحدين حيث $n = 3$ ، $p = \frac{4}{9}$.

$$(١) \text{ ح (س = ٠) } = \binom{3}{0} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{125}{729}$$

$$(٢) \text{ ح (س = ١) } = \binom{3}{1} \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{300}{729} = \frac{100}{243}$$

$$(٣) \text{ ح (س = ٢) } = \binom{3}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^1 = \frac{240}{729} = \frac{80}{243}$$

$$(٤) \text{ ح (س = ٣) } = \binom{3}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(\frac{5}{9}\right)^0 = \frac{64}{729}$$

(٥) مدى S = {٠، ١، ٢، ٣}.

(٦) التوزيع الاحتمالي لـ S هو:

س	٠	١	٢	٣
ح (س)	$\frac{١٢٥}{٧٢٩}$	$\frac{٣٠٠}{٧٢٩}$	$\frac{٢٤٠}{٧٢٩}$	$\frac{٦٤}{٧٢٩}$

(٧) التوقع لـ س = ت (س) = ن × ب

$$\frac{٤}{٣} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٩} \times ٣ =$$

(٨) تبا س = ن × ب × ١ - ب

$$\frac{٢٠}{٧٧} = \frac{٥}{٩} = \frac{٤}{٩} \times ٣ =$$

مسألة (١١)، إذا كان س متغيراً عشوائياً ملء {١، ٢، ...، ١٠} بحيث ح (س = س) -

$\frac{س}{١}$ فما قيمة أ.

الحل، بما أن ح (س = ١) + ح (س = ٢) + ... + ح (س = ١٠) = ١

$$١ = \frac{١}{١} + \dots + \frac{٣}{١} + \frac{٢}{١} + \frac{١}{١} \quad \text{فإن:}$$

$$١ = \left[\frac{١}{١} + \dots + \frac{٣}{١} + \frac{٢}{١} + \frac{١}{١} \right] \frac{١}{١}$$

$$١ = (١ + ١٠) \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١}$$

$$\infty = ١ \Leftarrow ١ = \infty \times \frac{١}{١} \quad \therefore$$

ملاحظة: استعملنا $\frac{١}{٢} (١ + ن) = ١ + \dots + ٢ + ١$

تمارين الوحدة السادسة

س١، إذا كان ح (I) = $\frac{1}{4}$ ، ح (I ∩ B) = $\frac{1}{3}$ ، ح (B / I) = $\frac{1}{4}$ أوجد :

$$(1) \text{ ح (B) } \quad (2) \text{ ح (I ∩ B)}$$

$$(3) \text{ ح (B / I)} \quad (4) \text{ ح (I ∩ B)}$$

$$(5) \text{ ح (I / B)} \quad (6) \text{ ح (I ∩ B)}$$

س٢، إذا كان ح (I / B) = $\frac{1}{3}$ ، ح (I / B) = $\frac{1}{4}$ ، ح (I ∩ B) = $\frac{1}{6}$ أوجد ح (I ∪ B).

س٣، إذا كان أ دب أوجد ح (I / B).

س٤، إذا كان أ، ب حادثين في Ω بحيث أن ح (I) = ٠,٥، ح (B) = ٠,٦، ح (I ∪ B) = ٠,٨، فهل أ، ب مستقلان؟

س٥، إذا كان أ، ب حادثين مستقلين في Ω بحيث أن ح (I) = ٠,١، ح (B) = ٠,٤، أوجد ما يلي:

$$(1) \text{ ح (I ∩ B)} \quad (2) \text{ ح (I / B)}$$

$$(3) \text{ ح (I ∪ B)} \quad (4) \text{ ح (I - B)}$$

$$(5) \text{ ح (I - B)} \quad (6) \text{ ح (I - B)}$$

س٦، في تجربة رمي حجر رمي نرد الأول أحمر والثاني اخضر أجب عن الأسئلة التالية:

(١) ما احتمال أن يزيد المجموع عن (١٠) علماً بأن العدد الظاهر على وجه الحجر الأحمر هو ٥؟

(٢) ما احتمال أن يكون المجموع أقل من (٦) علماً بأن العدد الظاهر على وجه الحجر الأحمر هو العدد ٢؟

س٧، شعبة فيها ٦ طالبات و ١٠ طلاب إذا اختيرت بطريقة عشوائية لجنة مكونة من ثلاثة من هذه الشعبة فأوجد احتمال أن يتم:

(١) اختيار ثلاثة طلاب في اللجنة

(٢) اختيار طالبين بالضبط.

(٣) اختيار طالب واحد على الأقل

(٤) اختيار طالبتين بالضبط.

س٨، صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور الأعداد الزوجية متساوي واحتمال ظهور الأعداد الفردية متساوي واحتمال ظهور العدد الزوجي ثلاثة أضعاف احتمال ظهور العدد الفردي فأوجد ما يلي:

(١) احتمال ظهور العدد الزوجي (٢) احتمال ظهور عدد أولي.

س٩، ألقي حجر نرد، إذا كان العدد الناتج أولي فما هو احتمال أن يكون فردي.

س١٠، في مدينة ما إذا علمت بأن ٤٠٪ من السكان عيونهم سوداء و ٣٠٪ شعرهم أشقر و ١٥٪ لهم عيون سوداء وشعر أشقر اختير شخص من السكان بشكل عشوائي أوجد ما يلي:

(١) إذا كان عيونه سوداء فما احتمال أن يكون شعره أشقر.

(٢) إذا كان عيونه ليست سوداء فما احتمال أن يكون شعره أشقر.

س١١، لدينا صندوقان أ، ب بالصندوق أ خمس كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء والصندوق ب كرة حمراء وكرتان من اللون الأبيض. ألقي حجر نرد فإذا ظهر الرقم ٣ أو ٦ تسحب كرة من ب وتوضع في أ ثم تسحب كرة من أ ويخلاف ذلك تسحب كرة من أ وتوضع في ب ثم تسحب كرة من ب.

(١) ما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأحمر؟

(٢) ما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض؟

س١٢، إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ أوجد س.

(١) إذا كان أ، ب حدثين منفصلين (٢) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين.

(٣) إذا كان $A \supset B$.

س١٣، صندوق أ به ٥ كرات حمراء و ٣ بيضاء وصندوق ب به كرتان من اللون الأحمر و ٦ كرات بيضاء.

(١) إذا سحبت كرة من كل صندوق فما هو احتمال أن تكونا من نفس اللون.

(٢) إذا سحب كرتان من كل صندوق فما هو احتمال أن تكون الكرات الأربع من نفس اللون.

س١٤، موظفان في سكرتارية مكتب نسخ الخطابات على الآلة الكاتبة، فإذا كان الموظف الأول ينسخ ٨٠% من الخطابات وكانت ٩٠% من خطابات بدون أخطاء وإذا كان الموظف الثاني ينسخ ٢٠% من خطابات المكتب وأن ٥٠% من خطابات بدون أخطاء، فإذا سحب خطاب من الخطابان المطبوعة في هذا المكتب فأوجد:

(١) احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.

(٢) احتمال أن يكون الخطاب قد طبعه الموظف الأول علماً بأن الخطاب به أخطاء.

س١٥، يحتوي صندوق على (٨) مصابيح ائتان منها معية إذا كانت التجربة هي اختيار عينة من أربعة مصابيح مع الإرجاع وط المتغير العشوائي س على عدد المصابيح التالفة في العينة. كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س وأوجد توقعه.

س١٦، احتمال أن يصيب شخص هدفاً يساوي $\left(\frac{1}{3}\right)$ فإذا أطلق شخص (٥) عيارات نارية على الهدف أوجد ما يلي:

(١) احتمال عدم إصابة الهدف (٢) احتمال إصابة الهدف (٥) مرات.

(٣) إصابة الهدف مرتان على الأكثر (٤) إصابة الهدف مرة على الأقل.

(٥) توقع إصابة الهدف (٦) التباين لإصابة الهدف.

س١٧، أوجد ن، ب لمتغير ذات الحدين إذا كان $\mu = ٥$ ، $\sigma = \frac{10}{4}$.

س١٨، أوجد قيمة أ، ب لتجعل الجدول التالي يمثل توزيعاً احتمالياً.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ح (س)	أ	٠,٢	٠,١	صفر	ب	٠,١

علماً بأن $P(S = ٤)$.

س١٩، إذا كان $P(S = ٣)$ أوجد $P(S = ٦)$

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

تعريفه.

(١-٧) خواص التوزيع الطبيعي.

(٢-٧) التوزيع الطبيعي المعياري.

(١-٢-٧) كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول

التوزيع الطبيعي المعياري.

(٢-٢-٧) كيفية استخراج العلامة المعيارية (ز) إذا

علمت المساحة.

تمارين الوحدة.

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

التوزيع الطبيعي (الزائبي)، Normal Distribution،

تعريفه: هو توزيع اقتران كثافته الاحتمالية متصل ويُعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

حيث μ هي معدل التوزيع، σ^2 هي تباينه.

$$\mu = 2,718280000 \dots = e, \quad \sigma^2 = 3,141590000 \dots = \pi$$

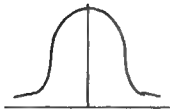
واحتمال الحدث: S تقع بين النقطتين a ، b يساوي:

$$P(a < S < b) = \int_a^b f(x) dx$$

(١-٧) خواص التوزيع الطبيعي:

(١) التوزيع الطبيعي متماثل حول العمود المقام على

الوسط μ وشكله يشبه الجرس. انظر الشكل (١).



الشكل (١)

(٢) للتوزيع الطبيعي قمة واحدة وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط.

(٣) يتقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما تقترب s من ∞ أو $-\infty$.

(٤) المساحة الواقعة تحت منحنى التوزيع وفوق محور السينات تساوي وحدة واحدة.

(٥) الوسط الحسابي = الوسط = المتوسط = المنوال.

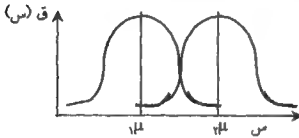
(٦) المساحة على يمين الوسط = المساحة على يسار الوسط = $0,5$.

(٧) إذا تحركت μ إلى اليمين أو اليسار ينتقل مركز التوزيع ولا يتغير شكل التوزيع، أما

إذا تغيرت σ وبقيت μ نفسها فإن تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما

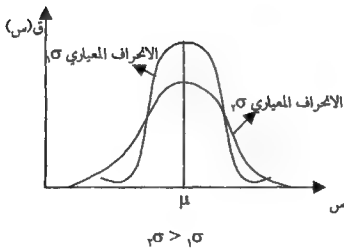
صغرت σ . أما إذا تغيرت μ و σ فإن مركز التوزيع يتغير وتباعد منحنى حول

المركز يتغير كذلك. والأشكال التالية تظهر لنا تأثير المنحنى باختلاف μ و σ .



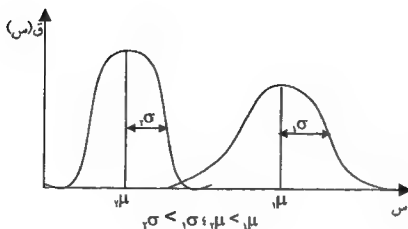
الشكل (٢)

[الشكل (٢) يظهر لنا إذا تغير الوسط الحسابي فإن منحنى التوزيع يتحرك يميناً أو يساراً ولكن شكل التوزيع لا يتغير].



الشكل (٣)

[الشكل (٣) يظهر لنا إذا تغير الانحراف المعياري وبقي الوسط ثابتاً فإن تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما صغرت σ].



[الشكل (٤) يظهر
لنا إذا تغيرت σ و μ
فإن مركز التوزيع
يتغير وتباعد منحناه
حول المركز يتغير
كذلك].

الشكل (٤)

(٧-٢) التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

يعرف التوزيع الطبيعي المعياري بأنه التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه ١، أي أن المتغير العشوائي (ز) يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان توزيع ز التوزيع الطبيعي ذا الوسط $\mu = \text{صفر}$ والتباين $\sigma^2 = ١$ ونعبر عنه بالرمز ز : ط (صفر، ١) وإذا كان س متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والتباين σ^2 فيمكن تحويل س إلى متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري باستخدام العلاقة:

$$Z = \frac{\mu - S}{\sigma}$$

إذ أن كل قيمة لـ س تقابلها قيمة لـ ز.

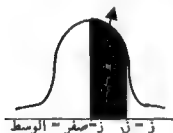
(٧-٢-١) كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

بما أن الوسط μ والتباين σ^2 يحددان التوزيع الطبيعي فإن المساحة على أي فترة تعتمد على μ و σ^2 وبالتالي لا يمكن وضع جداول لجميع قيم μ و σ^2 ولحساب المساحات تحت التوزيع الطبيعي سنقوم بتحويله إلى توزيع طبيعي معياري. ومن ثم نجد المساحة المطلوبة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. ونستخدم الجدول

[الموجود في نهاية الكتاب] الذي يعطي المساحة على يمين الوسط (ز = صفر) ويسار ز الموجبة لاحظ الشكل (٥).

أما عن كيفية إيجاد المساحة باستخدام الجدول سنعمل على تقسيمها إلى حالات:

المساحة التي يعطيها الجدول



الشكل (٥)

الحالة الأولى: الحالة القياسية (الجدولية):

المساحة الواقعة بين الوسط (ز = صفر) وقيمة (ز = ز) ح (صفر > ز) كما هو واضح في الشكل (٥) [مساحة المنطقة المظلة].

ملاحظة (١) سنرمز للمساحة الجدولية بالرمز ح (ز).

(٢) الجدول جانباً يمثل جزءاً من الجدول المستخدم في استخراج المساحات.

ز	٠,٠٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	0.0000	٠,٠٠٤٠	...							٠,٠٣٥٩
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤										
٠,٥										
٠,٦										
٠,٧										
٠,٨										
٠,٩										
١,٠	٠,٣٤١٣									
١,١										
١,٢										
١,٣										
١,٤										
١,٥										
١,٦										
١,٧										
١,٨										
١,٩										
٢,٠										
٢,١										
٢,٢										
٢,٣										

مثال (١): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (٠,٠٩).

(٢) ح (١,٠٥).

(٣) ح (٣,٣٦).

الحل:

(١) المطلوب هنا المساحة الجدولية المحصورة بين (ز = صفر، ز = ٠,٠٩) وبالبحت في الجدول في السطر الأول وتحت (٠,٠٩) نجد بأن ح (٠,٠٩) = ٠,٣٥٩.

(٢) لإيجاد المساحة الجدولية تحت (١,٠٥) نمد خط أفقي من (١,٠) وإنزال عمود من (١,٠٥) كما هو واضح (مرسوم) في الجدول فتكون المساحة المطلوبة هي نقطة التقاطع بين الخطين وبالتالي نجد بأن ح (١,٠٥) = ٠,٣٥٣٦.

(٣) كما فعلنا في (٢) نجد أن ح (٣,٣٦) = ٠,٤٩٩٥.

الحالة الثانية:



المساحة الواقعة على يسار الوسط (ز = صفر) ويمين (ز = -ز) = ح (-ز > ز > صفر) [المساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (٧)].

نتيجة التماثل نلاحظ بأن هذه المساحة

تساوي ح (ز).



ملاحظة: مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (٧)

تساوي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (٨)

وسنرمز لها بالرمز ح (-ز).

مثال (٢): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (-١).

(٢) ح (-٢).

الحل:

باستخدام الحالة الثانية نلاحظ أن:

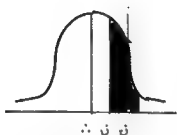
$$(1) \text{ ح } (1-) - \text{ ح } (1) = 0,3413$$

$$(2) \text{ ح } (2-) - \text{ ح } (2) = 0,4772$$

الحالة الثالثة:

المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين موجبتين

= ح (ز) > ز > ح (ز) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (٩).



الشكل (٩)

المساحة المطلوبة = المساحة الواقعة بين (صفر، ز) - المساحة الواقعة بين

(صفر، ز).

$$= \text{ ح } (ز) - \text{ ح } (ز)$$

مثال (٣)، أوجد المساحة المطلوبة:

$$(1) \text{ ح } (0,1) > ز > 0,6 \quad (2) \text{ ح } (1) > ز > 2$$

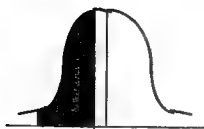
الحل:

$$(1) \text{ ح } (0,1) > ز > 0,6 = \text{ ح } (0,6) - \text{ ح } (0,1)$$

$$= 0,2259 - 0,3998 = 0,1861$$

$$(2) \text{ ح } (1) > ز > 2 = \text{ ح } (2) - \text{ ح } (1)$$

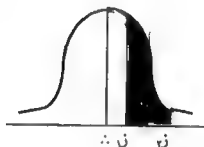
$$= 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$



$-z$ z

الشكل (١٠)

الحالة الرابعة: المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين سالبتين $-z$ و z ($-z < z$) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١٠) باستخدام خواص التوزيع الطبيعي فإن هذه المساحة تساوي المساحة الواقعة بين القيمتين z ، z [نتيجة التماثل].



$-z$ z

الشكل (١١)

ملاحظة: مساحة المنطقة المظلمة

في الشكل (١٠) تساوي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١١).

مثال (٤): أوجد المساحة التالية:

$$(١) \text{ ح } (-٠.٦ < z < ٠.١) \quad (٢) \text{ ح } (-٢ < z < ١)$$

$$\text{الحل، (١) ح } (-٠.٦ < z < ٠.١) = \text{ح } (٠.١) - \text{ح } (٠.٦)$$

$$= \text{ح } (٠.٦) - \text{ح } (٠.١) = ٠.١٨٦١$$

$$(٢) \text{ ح } (-٢ < z < ١) = \text{ح } (١) - \text{ح } (-٢)$$

$$= \text{ح } (٢) - \text{ح } (١) = ٠.١٣٥٩$$



$-z$ z

الشكل (١٢)

الحالة الخامسة:

المساحة الواقعة بين $(z = -z)$ و $(z = z)$ $-z < z$ وهذه مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١٢).

$$ح (-ن > ز > ز_1) = ح (ز_1) + ح (ز)$$

مثال (٥)، أوجد المساحة المطلوبة:

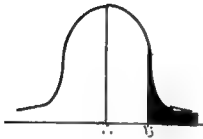
$$(١) ح (-١ > ز > ١) \quad (٢) ح (١,٣ - > ز > ٢,٣٣)$$

الحل:

$$(١) ح (-١ > ز > ١) = ح (٢) + ح (١) = ٠,٤٧٧٢ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨١٨٥$$

$$(٢) ح (١,٣ - > ز > ٢,٣٣) = ح (٢,٣٣) + ح (١,٣)$$

$$= ٠,٨٩٣٣ + ٠,٤٩٠١ + ٠,٤٠٣٢ = ٠,٨٩٣٣$$



الشكل (١٣)

الحالة السادسة، المساحة الواقعة على يمين ز الموجبة

= ح (ز < ز١) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١٣).

$$\therefore ح (ز < ز_1) = \text{المساحة على يمين}$$

الوسط - المساحة الجدولية تحت ز.

$$= ٠,٥٠٠٠ - ح (ز_1)$$

مثال (٦)، أوجد المساحة المطلوبة:

$$(١) ح (١ < ز) \quad (٢) ح (٢ < ز)$$

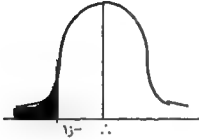
الحل:

$$(١) ح (١ < ز) = ٠,٥٠٠٠ - ح (١) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧$$

$$(٢) ح (٢ < ز) = ٠,٥٠٠٠ - ح (٢) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨$$

الحالة السابعة:

المساحة الواقعة على يسار $(z = -z_1)$ = ح $(z > -z_1)$
والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة
المظلة في الشكل (١٤).



الشكل (١٤)

نتيجة التماثل:

$$\text{ح } (z > -z_1) = \text{ح } (z < z_1)$$

= المساحة على يمين (z_1) .

مثال (٧): أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

$$(١) \text{ ح } (z > 1) \quad (٢) \text{ ح } (z > 2)$$

الحل،

$$(١) \text{ ح } (z > 1) = \text{ح } (z < 1) - ٠,٥٠٠٠$$

$$= ٠,٣٤١٣ - ٠,٥٠٠٠ = ٠,١٥٨٧$$

$$(٢) \text{ ح } (z > 2) = \text{ح } (z < 2) - ٠,٥٠٠٠$$

$$= ٠,٤٧٧٢ - ٠,٥٠٠٠ = ٠,٠٢٢٨$$

الحالة الثامنة:

المساحة الواقعة على يسار $(z = z_1)$ =
ح $(z > z_1)$ والمساحة المطلوبة هي مساحة
المنطقة المظلة في الشكل (١٥).



الشكل (١٥)

$$\text{ح } (z > z_1) = \text{ح } (z_1) + ٠,٥٠٠٠$$

مثال (٨)، أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

$$(١) \text{ ح } (١ > ز) \quad (٢) \text{ ح } (٢ > ز)$$

الحل:

$$(١) \text{ ح } (١ > ز) = (١) \text{ ح } + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٣٤١٣ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٨٤١٣$$

$$(٢) \text{ ح } (٢ > ز) = (٢) \text{ ح } + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٤٧٧٢ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٩٧٧٢$$

الحالة التاسعة:

المساحة الواقعة على يمين $(ز = -ز)$ = $(ز < -ز)$ والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (١٦).

نتيجة التماثل:

المساحة الواقعة على يمين

$(ز = -ز)$ = المساحة الواقعة على يسار

$(ز = ز)$.

$$\text{ح } (ز < -ز) = \text{ح } (ز > ز)$$



الشكل (١٦)

مثال (٩)، أوجد المساحة المطلوبة:

$$(١) \text{ ح } (١ < -ز) \quad (٢) \text{ ح } (١,٩٦ < -ز)$$

الحل:

$$(١) \text{ ح } (١ < -ز) = \text{ح } (ز > ١) = ٠,٥٠٠٠ + \text{ح } (١)$$

$$= ٠,٣٤١٣ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٨٤١٣$$

$$(٢) \text{ ح } (١,٩٦ < -ز) = ٠,٥٠٠٠ + \text{ح } (١,٩٦)$$

$$= ٠,٥٠٠٠ + \text{ح } (١,٩٦)$$

$$= ٠,٤٧٥٠ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٩٧٥٠$$

الحالة العاشرة، المساحة الواقعة بين $(-z, z)$ ح $-(z > z > z)$



= ح $(z > z)$ وهي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١٧).

$$= \text{ح } (z > z)$$

$$= 2 \times \text{ح } (z)$$

الشكل (١٧)

مثال (١٠)، أوجد المساحة المطلوبة:

$$(١) \text{ ح } (z > ٠,٥) \quad (٢) \text{ ح } (z > ١)$$

الحل،

$$(١) \text{ ح } (z > ٠,٥) = ٠,٥ \times 2 = ٠,١٩١٥ \times 2 = ٠,٣٨٣٠$$

$$(٢) \text{ ح } (z > ١) = ١ \times 2 = ٠,٣٤١٣ \times 2 = ٠,٦٨٢٦$$

الحالة الحادية عشرة،

المساحة الواقعة خارج $(-z, z)$ ح $(z < z)$

والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (١٨).

$$\text{ح } (z < z) = 1 - 2 \times \text{ح } (z)$$



مثال (١١)، أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

$$(١) \text{ ح } (z < ٠,٥) \quad (٢) \text{ ح } (z < ١)$$

الحل،

$$(١) \text{ ح } (z < ٠,٥) = 1 - 2 \times ٠,١٩١٥ = 1 - ٠,٣٨٣٠ = ٠,٦١٧٠$$

$$(2) \text{ ح (ز) } < 1 = 1 - 2 \times \text{ح (1)} = 1 - 0,6826 = 0,3174$$

مثال (١٢)، إذا كانت س: ط (٧٠، ٢٥) أوجد:

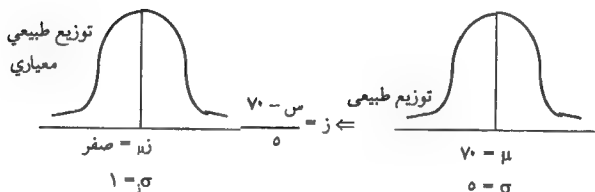
$$(1) \text{ ح (س} < ٧٣ \text{)} \quad (2) \text{ ح (٦٥} > \text{س} > ٧٢ \text{)}$$

$$(3) \text{ ح (س} > ٦٩ \text{)} \quad (4) \text{ ح (س} < ٨٠ \text{)}$$

الحل: بما أن المتغير س يخضع لتوزيع طبيعي وسطه (٧٠) وتباينه (٢٥) فإنه يجب

تحويل المتغير س إلى متغير طبيعي معياري (ز) حسب قانون العلامة المعيارية:

$$z = \frac{s - \mu}{\sigma} = \frac{s - ٧٠}{٥}$$



$$(1) \text{ ح (س} < ٧٣ \text{)} = \text{ح} \left(\frac{s - ٧٣}{٥} < \frac{٧٠ - ٧٣}{٥} \right) = \text{ح (ز} < -٠,٦ \text{)}$$

$$= 0,5000 - 0,22٥٧ = 0,2٧٤٣$$

ملاحظة على الفرع (١): تم تحويل العلامة الخام (٧٣) إلى علامة معيارية (٠,٦)

ومن ثم استخرجت المساحة الواقعة على يمين (٠,٦).

$$(2) \text{ ح (٦٥} > \text{س} > ٧٢ \text{)} = \text{ح} \left(\frac{٧٠ - ٧٢}{٥} > \frac{s - ٧٠}{٥} > \frac{٧٠ - ٦٥}{٥} \right)$$

$$= \text{ح} (-1 > z > -٠,٤)$$

$$\begin{aligned}
& \text{ح (١)} + \text{ح (٤)} = \\
& ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٥٤ + ٠,٤٩٦٧ \\
& \text{ح (٣)} = \text{ح (س > ٦٩)} = \text{ح} \left(\frac{\text{س} - ٦٩}{٥} > \frac{٧٠ - ٦٩}{٥} \right) = \text{ح} (ز > ٠,٢) \\
& ٠,٥٠٠٠ = \text{ح} (٠,٢) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٠٧٩٣ = ٠,٤٢٠٧ \\
& \text{ح (٤)} = \text{ح (س < ٨٠)} = \text{ح} \left(\frac{\text{س} - ٨٠}{٥} < \frac{٧٠ - ٨٠}{٥} \right) = \text{ح} (ز < ٠,٢) \\
& ٠,٥٠٠٠ = \text{ح} (٠,٢) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨
\end{aligned}$$

مثال (١٣)، إذا كانت علامات (١٠٠٠٠٠) طالب في الثانوية العلة تتبع التوزيع الطبيعي في الوسط (٦٣) وتباين (٤٩) أوجد ما يلي:

- (١) عدد الطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٦٠، ٧٥.
- (٢) نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن العلامة (٩٢).
- (٣) عدد الطلبة الناجحين إذا كانت علامة النجاح (٥٠).
- (٤) الرتبة المئينية للعلامة (٧٠).
- (٥) الرتبة المئينية للعلامة (٥٤).

الحل:

يتضح من المعطيات بأن س : علامة الطالب في الثانوية العلة تخضع لتوزيع طبيعي وسطه (٦٣) وتباين (٤٩) وبالتالي يجب تحويل المتغير العشوائي س من متغير طبيعي إلى متغير معياري حسب العلامة المعيارية.

$$z = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \frac{\text{س} - ٦٣}{٧}$$

(١) يجب أولاً استخراج المساحة الواقعة بين (ز، ز_١)، (ز، ز_٢).

$$= \text{ح} (٦٠ > \text{س} > ٧٥)$$

$$ح = \left(\frac{٧٥ - ٧٣}{٧} > \frac{٧٣ - ٧٥}{٧} > \frac{٦٠ - ٧٣}{٧} \right) ح = (١,٧ > ز > -٠,٤٣)$$

$$ح = (١,٧) + ح = (٠,٤٣) - ٠,٤٥٦٤ + ٠,١٦٦٤ = ٠,٦٣٢٨$$

وبالتالي عدد الطلبة = المساحة المستخرجة \times عدد الطلبة الكلي.

$$٠,٦٣٢٨ \times ١٠٠٠٠٠ = ٦٣٢٨٠ \text{ طالباً}$$

(٢) نسبة الطلبة الذين يزيد علاماتهم عن (٩٢) تساوي المساحة الواقعة على يمين (ز) مضروبة ١٠٠٪.

$$\therefore ح (س < ٩٢) = ح \left(\frac{٧٣ - ٩٢}{٧} < \frac{٧٣ - ٧٥}{٧} \right)$$

$$ح (ز < ٤,١٤) =$$

$$= ٠,٥٠٠٠ - ح (٤,١٤) = \text{صفر}$$

\therefore نسبة الطلبة الذين علاماتهم تزيد عن ٩٢ = صفر $\times ١٠٠\%$

$$= \text{صفر} \%$$

(٣) حتى يكون الطالب ناجحاً يجب أن تكون علامته أكثر من أو تساوي (٥٠).

وعندئذ يجب استخراج المساحة الواقعة على يمين (س = ٥٠) = المساحة الواقعة على يمين (ز = ١,٨٦).

$$= ٠,٥٠٠٠ + ح (١,٨٦) = ٠,٤٦٨٦ + ٠,٩٦٨٦ =$$

$$\therefore \text{عدد الطلبة الناجحين} = ٠,٩٦٨٦ \times ١٠٠٠٠٠ = ٩٦٨٦٠ \text{ طالب}$$

(٤) الرتبة المئينية للعلامة (٧٠) هي النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن العلامة

(٧٠) أو هي النسبة المئوية للمساحة الواقعة إلى يسار (ز).

$$ح (س > ٧٠) = ح (ز > ١)$$

$$= ٠,٥٠٠٠ + ح (١) = ٠,٣٤١٣ + ٠,١٥٨٧ = ٠,٤٩٩٩$$

\therefore الرتبة المئينية = المساحة المستخرجة $\times ١٠٠\%$

$$= ٠,٤٩٩٩ \times ١٠٠ = ٤٩,٩٩ \%$$

(٥) الرتبة المئينية للعلامة (٥٤) هي النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن (٥٤) أو هي النسبة المئوية للمساحة الواقعة إلى يسار (ز). .

$$ح (س > ٥٤) = ح (ز > ١,٢٩)$$

$$= ح (ز < ١,٢٩) - ٠,٥٠٠٠ = ٠,٩٨٥ - ح (١,٢٩)$$

$$= ٠,٩٨٥ - ٠,٤٠١٥ = ٠,٥٨٣٥$$

$$\therefore \text{الرتبة المئينية} = ٠,٥٨٣٥ \times ١٠٠ = ٥٨,٣٥$$

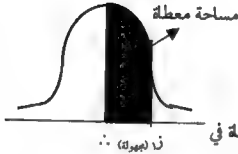
(٧-٢) كيفية استخراج العلامة المعيارية (ز) إذا علمت المساحة،

الحالة الأولى،

$$ح (ز > ز) = ح (ز > ز)$$

$$= ح (ز) - \text{مساحة معطلة}$$

[انظر الشكل المجاور]



في هذه الحالة نبحث عن المساحة المعطلة في

الجدول مباشرة وإذا لم نجدها نأخذ أقرب مساحة إليها.

مثال (١٤): استخراج قيمة (ز) المطلوبة:

$$ح (٤) = ح (ز > ز) = ٠,١٢٥٤$$

$$ح (١) = ح (ز > ز) = ٠,٢٣٥٧$$

$$ح (٥) = ح (ز > ز) = ٠,٤٥٠٠$$

$$ح (٢) = ح (ز > ز) = ٠,٠٢٣٩$$

$$ح (٣) = ح (ز > ز) = ٠,٤٧٧٠$$

z	٠,٠	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨
٠,٠							٠,٠٣٣٩		
٠,١									
٠,٢									
٠,٣									
٠,٤									
٠,٥									
٠,٦				٠,٣٥٠٧					
...									
٣,٣									

الحل:

(١) نبحث عن المساحة المعطلة وهي (٠,٣٥٠٧).

في الجدول فنجدها تقابل علامة معيارية (z = ٠,٦ + ٠,٣ = ٠,٩) = (z = ٠,٩).

(٢) نبحث عن المساحة المعطلة (٠,٣٣٩) فنجدها تقابل z = ٠,٦.

(٣) نبحث عن المساحة المعطلة (٠,٤٧٧٠) في الجدول ولكن لم يتم العثور عليها فنأخذ

أقرب مساحة لها وهي (٠,٤٧٧٢) فتكون قيمة z = ٢.

(٤) نبحث عن المساحة المعطلة في الجدول ولكن لن نجدها فنأخذ أقرب مساحة لها

وهي (٠,١٢٥٥) فتكون قيمة z = ٣,٤.

(٥) نبحث عن المساحة المعطلة (٠,٤٥٠٠) في الجدول ولكن لن نجدها فنأخذ أقرب

مساحة لها وهنا توجد مساحتين هما (٠,٤٤٩٥) و (٠,٤٥٠٥) فتكون قيمة z

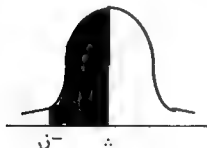
تساوي الوسط الحسابي لقيمتي z المقابلة لهما.

$$\text{وعندئذ فإن } z = \frac{1,7٥ + 1,7٤}{2} = 1,7٤٥$$

الحالة الثانية:

ح (-z > z > ∴) = مساحة معطلة

[انظر الشكل المجاور].



نبحث عن المساحة المعطلة في الجدول مباشرة كما فعلنا في الحالة الأولى وتكون z المقابلة سالبة.

مثال (١٥): أوجد قيمة z المطلوبة:

$$(١) \text{ ح } (z) > z > \therefore = ٠,٤٧٣٨$$

$$(٢) \text{ ح } (z) > z > \therefore = ٠,٤٣٠٦$$

الحل: (١) نبحث عن المساحة المعطلة (٠,٤٧٣٨) في الجدول مباشرة لنجد بأن قيمة z المقابلة لها (١,٩٤) وعندئذ تكون قيمة z المطلوبة = -١,٩٤.

(٢) نبحث عن المساحة المعطلة (٠,٤٣٠٦) في الجدول لنجد قيمة z المقابلة لها تساوي (١,٤٨) وعندئذ تكون قيمة $(z) = -١,٤٨$.

الحالة الثالثة:

ح $(z > z) = \text{مساحة معطلة} = \text{المساحة الواقعة على يسار (تحت) } z = z$



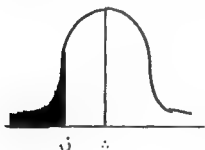
(أ) إذا كانت المساحة المعطلة أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن z تكون موجبة ولإيجابها نطرح من المساحة المعطلة (٠,٥٠٠٠) كما يلي:

$$\text{ح } (z) = \text{المساحة المعطلة} - ٠,٥٠٠٠$$

= المساحة النقيجة

ثم نبحث عن المساحة النقيجة في الجدول مباشرة لإيجاد قيمة z المقابلة.

(ب) إذا كانت المساحة المعطلة أقل من (٠,٥٠٠٠) فإن z تكون سالبة ولإيجابها نطرح



المساحة المعطلة من (٠,٥٠٠٠) كما يلي:

$$\text{ح } (z) = ٠,٥٠٠٠ - \text{المساحة المعطلة}$$

= المساحة النقيجة

ثم نبحث عن المساحة الناتجة في الجدول لإيجاد قيمة (z_1) المقابلة وعندئذ تكون $z_1 = -z_2$.

مثال (١٦): استخراج قيمة z المطلوبة فيما يلي:

$$(١) \text{ ح } (z > z_1) = ٠,٨٣٦٥ \quad (٢) \text{ ح } (z > z_2) = ٠,١٦٨٥$$

الحل: (١) بما أن المساحة المعطاة على يسار $(z = z_1)$ أكبر من $(٠,٥٠٠٠)$ فإن z_1 موجبة وعندئذ فإن:

$$\begin{aligned} \text{ح } (z_1) - \text{المساحة الجدولية تحت } (z_1) &= ٠,٨٣٦٥ - ٠,٥٠٠٠ \\ &= ٠,٣٣٦٥ \end{aligned}$$

وبالبحث في الجدول نجد بأن $z_1 = ٠,٩٦$

(٢) بما أن المساحة المعطاة على يسار $(z = z_2)$ أقل من $(٠,٥٠٠٠)$ فإن z_2 سالبة وعندئذ فإن:

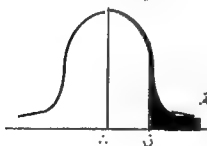
$$\begin{aligned} \text{ح } (-z_2) &= ٠,٥٠٠٠ - ٠,١٦٨٥ \\ &= ٠,٣٣٦٥ \end{aligned}$$

وبالبحث في الجدول نجد بأن $-z_2 = ٠,٩٦ \Rightarrow z_2 = -٠,٩٦$

الحالة الرابعة:

المساحة الواقعة على يمين $(z = z_1) = \text{ح } (z < z_1) = \text{مساحة معطاة}$.

(أ) إذا كانت المساحة المعطاة أقل من $(٠,٥٠٠٠)$ فإن قيمة z_1 تكون موجبة ولكي نستخرج قيمة (z_1) نطرح المساحة المعطاة من $(٠,٥٠٠٠)$ كالتالي:



$$\text{ح } (z_1) = ٠,٥٠٠٠ - \text{المساحة المعطاة}$$

$$= \text{المساحة الناتجة}$$

ثم نبحث عنها في الجدول لاستخراج (z_1) المقابلة.



(ب) إذا كانت المساحة المعطلة أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة z تكون سالبة ولكي نستخرج قيمة z نطرح (٠,٥٠٠٠) من المساحة المعطلة كالتالي:

$$ح (-z) = \text{المساحة المعطلة} - ٠,٥٠٠٠$$

= المساحة الناتجة

ثم نبحث عنها في الجدول.

مثال (١٧)، استخراج قيمة z المطلوبة:

$$(١) ح (z < z) = ٠,٣٦٥ \quad (٢) ح (z < z) = ٠,١١٥$$

الحل، (١) بما أن المساحة المعطلة أقل من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة z موجبة وبالتالي فإن:

$$ح (z) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣٦٥ = ٠,١٣٥$$

وبالبحث عن هذه المساحة (٠,١٣٥) في الجدول، نجد بأن $z = ٠,٤٩$

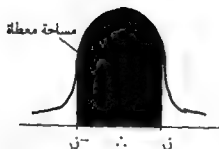
(٢) بما أن المساحة المعطلة أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة z سالبة وبالتالي فإن:

$$ح (-z) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,١١٥ = ٠,٣٨٥$$

وبالبحث عن هذه المساحة (٠,٣٨٥) في الجدول، نجد بأن $z = ٠,٨٨$

وعليه فإن $z = ٠,٨٨$

الحالة الخامسة:



المساحة الواقعة بين $(-z, z) = ح (z > z)$

= مساحة معطلة لكي نستخرج قيمة z نعمل

التالي:

$$\frac{\text{المساحة المعطاة}}{2} = \text{ح (ز)} = \text{المساحة المستخرجة}$$

ثم نبحث عن المساحة المستخرجة في الجدول لإيجاد (ز) المقابلة.

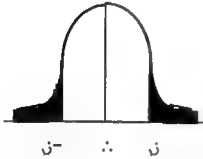
مثال (١٨): أوجد قيمة ز، حيث $\text{ح (ز)} > 0.9544$

$$\text{الحل: المساحة المستخرجة} = \text{ح (ز)} = \frac{0.9544}{2} = 0.4772$$

وبالبحث عنها في الجدول نجد بأن ز المقابلة = ٢.

الحالة السادسة:

المساحة الواقعة خارج $(-ز, ز) = \text{ح (|ز| < ز)} = \text{مساحة معطاة}$



$$\text{ح (ز)} = \frac{1 - \text{المساحة المعطاة}}{2} = \text{مساحة ناتجة}$$

ثم نبحث عنها في الجدول.

مثال (١٩): أوجد قيمة ز، حيث $\text{ح (ز)} < 0.456$

$$\text{الحل: المساحة الناتجة} = \text{ح (ز)} = \frac{0.456 - 1}{2} = 0.272$$

وبالبحث عن المساحة (0.272) في الجدول نجد بأن ز = ٢.

مثال (٢٠): في امتحان علم كان الوسط الحسابي يساوي (٤٨) والانحراف المعياري (٨) فإذا كان التوزيع قريباً من التوزيع الطبيعي.

المطلوب:

(١) علامة النجاح في هذا الامتحان إذا كان عدد الناجحين في الامتحان (٦٥٠٠) وعدد المتقدمين له (١٠٠٠٠) شخص.

(٢) إذا كانت اللجنة الفاحصة تعطي جائزة لأعلى ٥% من الطلبة فما هي أقل علامة تحصل على جائزة.

(٣) المئين الستون.

(٤) المئين التسعون.

(٥) نصف المئى الربيعي.

(٦) إذا اتفق على تقسيم أفراد هذا التوزيع إلى خمس فئات مرتبة كالتالي:

فئة الممتاز وتتكون من ١٠% من الطلبة.

فئة الجيد وتتكون من ٢٠% من الطلبة.

فئة المتوسط وتتكون من ٤٠% من الطلبة.

فئة دون المتوسط وتتكون من ٢٠% من الطلبة.

فئة الضعيف وتتكون من ١٠% من الطلبة.

أوجد حدود الفئات الخمس من العلامات.

الحل:

إذا كان s متغير عشوائي يعني العلامة فإن s : ط (٤٨، ٦٤).

$$(١) \text{ المطلوب هنا هو إيجاد قيمة } s, \text{ بحيث أن } H(s) = \frac{7500}{10000}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = 0,7500 = H(s_1)$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \left(\frac{48-s}{8} \right) = 0,7500$$

$$\text{لتكن } z = \frac{48-s}{8}$$

$$\Leftrightarrow H(-z) = 0,7500 = 0,5000 - 0,2500 = H(-z_1)$$

$$\Leftrightarrow -z_1 = 0,39 = z \Leftrightarrow z = -0,39$$

$$\text{وعندئذ فإن } -0,39 = \frac{48-s}{8}$$

$$\Leftrightarrow s = 48 - 0,39 \times 8 = 44,88$$

مما يعني بأن علامة النجاح = ٤٤,٨٨ فأكثر.
(٢) المطلوب إيجاد قيمة \bar{A} التي نسبة (٠,٥) من المساحة فوقها وبالتالي فإن المطلوب:

$$ح (س < \bar{A}) = ٠,٥ \Leftrightarrow ح (ز < \bar{z}) = ٠,٥$$

$$\Leftrightarrow ح (ز) = ٠,٥ - ٠,٥٠٠ = ٠,٤٥٠$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = ١,٦٤٥$$

$$\text{وعليه فإن } \bar{z} = ١,٦٤٥ = \frac{\bar{A} - ٤٨}{٨} \Leftrightarrow \bar{A} = ٦١,٦$$

وبالتالي فإن أقل علامة تحصل على جائزة تساوي (٦١,٦).
(٣) المئين الستون هي العلامة التي تحصر تحتها ٦٠% من العلامات وبالتالي المطلوب إيجاد العلامة التي تحصر بينها وبين الوسط ١٠% من العلامات.
من المعطيات:

$$ح (س > ١,٤) = ٠,٦٠٠$$

نجد أولاً العلامة المعيارية (ز) المقابلة لـ ١,٤

$$ح (ز) = ٠,٦٠٠ - ٠,٥٠٠ = ٠,١٠٠$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = ٠,٢٥$$

$$\therefore \frac{\bar{A} - ٤٨}{٨} = ٠,٢٥$$

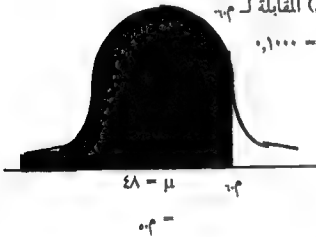
$$\Leftrightarrow ١,٤ = ٤٨ + ٢ = ٥٠$$

(٤) من المعطيات:

$$ح (س > ١,٤) = ٠,٩٠٠$$

وبإيجاد قيمة (ز) المقابلة لـ ١,٤

$$ح (ز) = ٠,٩٠٠ - ٠,٥٠٠ = ٠,٤٠٠$$



$$\Leftarrow z = 1,28$$

$$\therefore 1,28 = \frac{48 - \frac{104}{8}}{8} \Leftarrow m = 58,24$$

$$(5) \text{ نصف المدى الربيعي } = \frac{104 - 104}{2}$$

(أ) نجد $m = 58$ بناءً على تعريف المئين الخامس والسبعون نجد بأن:

$$ح (س > m) = 0,7500 \text{ وبالتالي فإن:}$$

$$ح (ز) = (0,7500 - 0,5000) = 0,2500 \Leftarrow z = 0,67$$

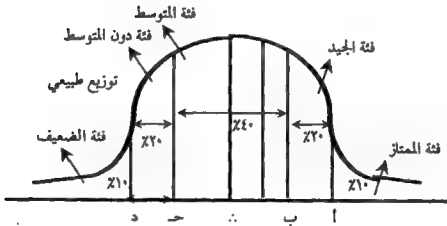
$$\therefore 0,67 = \frac{48 - \frac{104}{8}}{8} \Leftarrow m = 53,36$$

(ب) نجد $m = 53$ وبالتماثل نجد بأن قيمة (ز) المقابلة بـ $m = 53$ تساوي $(-0,67)$.

$$\text{وعندئذ فإن } -0,67 = \frac{48 - \frac{104}{8}}{8} \Leftarrow m = 42,64$$

$$\therefore \text{نصف المدى الربيعي} = \frac{42,64 - 53,36}{2} = 5,36$$

(٦) الشكل المجاور يبين توزيع الفئات حسب المعطيات.



حتى نستطيع إيجاد أ، ب، ح، د يجب أولاً إيجاد العلامات المعيارية المقابلة لها ز،

زب، زد

$$(١) \text{ ح (ز < ز)} = ٠,١٠٠٠ \quad (٣) \text{ ح (ز < ز)} = ٠,٧٠٠٠$$

$$(٢) \text{ ح (ز < ز)} = ٠,٣٠٠٠ \quad (٤) \text{ ح (ز < ز)} = ٠,٩٠٠٠$$

وبالتالي فإن:

$$(١) \text{ ح (ز)} = ٠,٥٠٠٠ - ٠,١٠٠٠ = ٠,٤٠٠٠$$

$$\Leftarrow \text{ز} = ١,٢٨$$

وبالتماثل نجد بأن ز = ١,٢٨ -

$$(٢) \text{ ح (ز)} = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣٠٠٠ = ٠,٢٠٠٠$$

$$\Leftarrow \text{ز} = ٠,٥٢ \text{ وبالتماثل نجد بأن ز} = -٠,٢٥$$

وعندئذ فإن:

$$\text{ز} = ١,٢٨ - \frac{٤٨-١}{٨} = ٠,٢٤$$

$$\text{ز} = ١,٢٨ - \frac{٤٨-٣}{٨} = ٣٧,٧١$$

$$\text{ز} = -٠,٢٥ - \frac{٤٨-٢}{٨} = ٥٢,١٦$$

$$\text{ز} = -٠,٥٢ - \frac{٤٨-٥}{٨} = ٤٣,٨٤$$

وعليه فإن حدود الفئات الخمس هي:

فئة الممتاز من ٥٨,٢٤ فأكثر.

فئة الجيد من ٥٢,٢٤ إلى ٥٨,٢٤.

فئة المتوسط من ٤٣,٨٤ إلى ٥٢,٢٤.

فئة دون المتوسط من ٣٧,٧١ إلى ٤٣,٨٤.

فئة الضعيف دون ٣٧,٧١.

مثال (٢١)، إذا كانت الأجور الأسبوعية لعمال مصنع ما تتبع التوزيع الطبيعي وجد أن ٦٠٪ من العمال يتقاضون أجراً أقل من ٣٥ دولاراً وأن ٨٠٪ يتقاضون أجراً أقل من ٦٠ دولار أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

الحل: حيث أن معالم المجتمع (μ , σ) مجهولتين والمعطى:

$$(1) \text{ ح (س) } > 35 = 0,1000$$

$$(2) \text{ ح (س) } > 60 = 0,8000$$

بتحويل المتغير العشوائي س إلى

متغير معياري فيصبح لدينا:

$$(1) \text{ ح (ز) } = 0,3000$$

$$(2) \text{ ح (ز) } = 0,4000$$

$$\Leftarrow z_{0,4} = 0,84$$

$$(1) \dots\dots\dots \sigma - 60 = \sigma \cdot 0,84 \Leftarrow \frac{\mu - 60}{\sigma} =$$

$$\sigma 1,28 \Leftarrow 1,28 = \frac{\mu - 35}{\sigma} = z_{0,8}$$

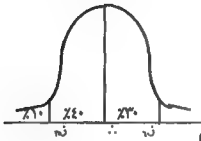
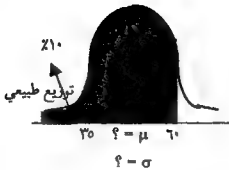
$$(2) \dots\dots\dots \mu - 35 =$$

ويضرب المعادلة (2) بـ 1- وجمعها للمعادلة (1) ينتج:

$$11,79 = \frac{25}{2,12} = \sigma \Leftarrow 25 = \sigma 2,12$$

الآن بالتعويض في المعادلة (1) ينتج:

$$50,09 = \mu \Leftarrow \mu - 60 = 11,79 \times 0,84$$



تمارين الوحدة السابعة

س١، إذا كانت ز ط (صفر، ١) أوجد:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (١) ح (٠ > ز > ٠,٨٩) | (٣) ح (١ > ز > ١,٩٥) |
| (٢) ح (٠,٣- > ز > ٠) | (٤) ح (٣- > ز > ٢,١٨) |
| (٥) ح (١- > ز > ٢,٨٨) | (٦) ح (ز < ٢,٤) |
| (٧) ح (ز < -٢,٤) | (٨) ح (ز < ١,١٣) |

س٢، أوجد قيمة ز المطلوبة فيما يلي:

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| (١) ح (٠ > ز > ز) = ٠,٤٣٣٢ | (٤) ح (ز > ز) = ٠,٤٣٣٠ |
| (٢) ح (ز > ز > ٠) = ٠,٤٣٣٣ | (٥) ح (ز < ز) = ٠,٤٣٣٠ |
| (٣) ح (ز < ز) = ٠,٦٩١٥ | (٦) ح (ز > ز) = ٠,٦٩١٥ |

س٣، إذا كانت س: ط (٨٠، ٦٤) أوجد قيمة أ المطلوبة:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (١) ح (س < أ) = ٠,٩٥٠٠ | (٢) ح (س > أ) = ٠,٩٥٠٠ |
|------------------------|------------------------|

س٤، إذا كانت س: ط (٣٦، ٧٢) أوجد ما يلي:

- | | |
|----------------|---------------------|
| (١) ح (س > ٦٦) | (٣) ح (س < ٧٨) |
| (٢) ح (س < ٦٦) | (٤) ح (٦٥ > س > ٧٨) |

س٥، إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب في امتحان ما تتبع التوزيع الطبيعي بوسط

حسابي مقداره (٦٥) وتباين (٤٩) أوجد ما يلي:

(١) عدد الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن (٧٢).

(٢) علامة النجاح إذا كان عدد الناجحين يساوي (٦٧٠٠) طالب.

(٣) نسبة الطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٥٨، ٧٩.

(٤) المئين الثمانون.

(٥) المئين العشرون.

(٦) المدى الربيعي.

(٧) الرتبة المئينية للعلامة (٧٢).

س٦، إذا كان الأجر اليومي لعمال النسيج يتوزع تبعاً للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (٢٠) دولار وبالمخرف معياري (٢) دولار أوجد الأجرة التي سيتسلم ٢٠٪ من عمال النسيج أكثر منها.

س٧، شركة لإنتاج الصواريخ لديها آلة جديدة .. فإذا كان مدى الصواريخ يتبع التوزيع الطبيعي بالمخرف معياري (٥) كم أوجد قيمة متوسط المدى الذي يجب أن تجهز الآلة عنده حتى تضمن الشركة أن ٤٪ فقط من الصواريخ سوف يكون مداها (٢٥٠) كم أو أقل.

س٨، أجرى معلم اختباراً لطلابه وكان توزيع نتائجهم قريباً من التوزيع الطبيعي فإذا كان الوسط الحسابي يساوي (٧٠) والانحراف المعياري (٥) وعلامة النجاح تساوي ٦٢ فما هي نسبة النجاح.

س٩، إذا كانت علامات الطلبة في جامعة البلقاء التطبيقية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه (٦٩) والمخرف معياري (٨) أوجد ما يلي:

(١) إذا كانت هذه الجامعة تمنح جائزة تقديرية لأعلى ٤٪ من طلبتها فما هي أقل علامة تحصل على جائزة تقديرية.

(٢) إذا كان عدد الطلبة في الجامعة (٣٠٠٠٠) طالب وعدد الطلبة الناجحين يساوي (١٨٠٠٠) فما هي علامة النجاح.

(٣) المئين السبعون.

(٤) المئين ٣٠.

(٥) نصف المدى الربيعي.

(٦) إذا كانت الجامعة تعمل على تقسيم علامات الطلبة فيها إلى خمس فئات هي:

فئة الممتاز وتتكون من ٥% من الطلبة.

فئة الجيد جداً وتتكون من ١٥% من الطلبة.

فئة الجيد وتتكون من ٢٠% من الطلبة.

فئة المتوسط وتتكون من ٣٠% من الطلبة.

فئة الضعيف وتتكون من بقية الطلبة.

أوجد حدود الفئات الخمس من العلامات.

الأرقام القياسية

The index numbers

- (١-٨) مفهوم الرقم القياسي.
- (٢-٨) الأسس والمقارنة.
- (٣-٨) أهمية الأرقام القياسية واستعمالاتها.
- (٤-٨) طرق تركيب الأرقام القياسية.
- (١-٤-٨) الأرقام القياسية البسيطة.
- (٢-٤-٨) الأرقام القياسية المرجحة.

تمارين الوحدة.

الأرقام القياسية

The index numbers

(١-٨) مفهوم الرقم القياسي:

الرقم القياسي مؤشر إحصائي يستخدم للتعبير عن التغير النسبي أو النسبي المثوي الذي يصيب ظاهرة ما نتيجة لاختلاف الزمان أو المكان، وكما أنه يستخدم لمقارنة التغير في ظاهرة واحدة يمكن استخدامه لمقارنة التغير في المستوى العام لمجموعة من المتغيرات أو الظواهر المختلفة فيما بينها لكن يجب أن تكون هذه الظواهر مشتركة في صفة معينة لتكون مجموعات متجانسة وكمثال على هذا إذا أردنا مقارنة إنتاج السلع الاستهلاكية الرأسمالية في عام ١٩٨٥ مع نظيره في عام ١٩٩٥ فإن إنتاج كل من أجهزة الكمبيوتر والستلايت والألعاب الإلكترونية... إلخ يكون مجموعات متجانسة ممثلة للسلع الاستهلاكية مع وجود الاختلافات الكثيرة بينها فلو أن إنتاج مثل هذه السلع يتغير بنفس النسبة سوف لا تكون هنالك أية مشكلة في مقارنة التغيرات لكن عملياً فإن كل سلعة من هذه السلع تحكمها ظروف مختلفة وبالتالي فإن إنتاج مثل هذه السلع يتغير بنسب مختلفة، وقد يكون من المفيد إيجاد وسيلة ولو تقريبية لاحتواء العوامل الثابتة والمتغيرة التي تحكم هذه الظواهر.

(٢-٨) الأساس والمقارنة:

- إذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في زمان معين إلى قيمتها في زمان آخر نتخذ أساساً نسبي هذا الزمان الأول فترة المقارنة أما إذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في مكان معين إلى قيمتها في مكان آخر نتخذ أساساً نسبي المكان الآخر المكان الأساسي والمكان المعين بالمكان المقارن.

مثال (١):

إذا كان سعر كيلو الخبز عام ١٩٨٧ يساوي (٨) قروش وأصبح سعر كيلو الخبز في عام ١٩٩١ يساوي (٢٠) قرشاً فإن منسوب سعر كيلو الخبز = $\frac{20}{8} \times 100\% = 250\%$ أي أن سعر كيلو الخبز تضاعف بمقدار مرتين ونصف ونطلق على عام ١٩٨٧ فترة الأساس وعام ١٩٩١ (فترة المقارنة).

وعند اختيار مكان الأساس أو زمان الأساس يجب أن يتمتع بالاستقرار الاقتصادي وأن تكون خالية من العوامل الشائعة للحروب مثلاً وأن لا يكون الأساس بعيداً عن المقارنة.

(٨-٣) أهمية الأرقام القياسية واستعمالاتها:

تستعمل الأرقام القياسية في شتى نواحي الحياة لقياس التغير الذي يطرأ عليها من هنا كان للأرقام القياسية تطبيقات عديدة في مجالات مختلفة متعلقة بالعلوم الاجتماعية والنفسية والإدارية والزراعية والمالية كما تساعد الأرقام القياسية على تحليل العوامل التي تساعد في تغير الظاهرة فتبين مدى مساهمة كل عامل من هذه العوامل في إحداث التغير الكلي وتستخدم الأرقام القياسية أيضاً في الرقابة على تنفيذ الخطط حيث يستفاد فيها في تحديد مدى تنفيذ الخطط الموضوعة.

يستعمل الرقم القياسي لمعرفة القوة الشرائية لدخل الفرد (الدخل الحقيقي للفرد) هي عبارة عن خارج قسمة الرقم القياسي للدخل على الرقم القياسي لتكاليف المعيشة والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٢):

إذا كان الرقم القياسي للدخل للفرد عام ١٩٩١ بالنسبة لعام ١٩٨٧ يساوي (١,٢) بينما الرقم القياسي لتكاليف المعيشة لعام ١٩٩١ بالنسبة لعام ١٩٨٧ يساوي (٢,٤) أوجد الدخل الحقيقي للفرد.

الحل:

الرقم القياسي للدخل

الدخل الحقيقي للدخل الفرد (القوة الشرائية للدخل الفرد) =

الرقم القياسي لتكاليف المعيشة

$$0,5 = \frac{1,2}{2,4}$$

ومن هنا نلاحظ بأن القوة الشرائية قد نقصت إلى النصف مما يدل على
هناك انكماش في الدخل الحقيقي للفرد

(٨-٤) طرق تركيب الأرقام القياسية:

يتركب الرقم القياسي من قيمة ظاهرة أو أكثر في أزمنة أو أماكن مختلفة. وكل
قيمة من هذه القيم تدخل في الرقم القياسي طبقاً للهدف الذي يكون الرقم
القياسي من أجله وهناك عدة أساليب لتركيب الأرقام القياسية منها:

(٨-٤-١) الأرقام القياسية البسيطة:

وهي نوعان:

الأرقام القياسية البسيطة للأسعار وهي:

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار:

إذا كان (ع) هو السعر في سنة المقارنة و (ع_ر) هو السعر في سنة الأساس
فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

مجموع أسعار سنة المقارنة

$$\text{رقم ت.ب} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}}{100\%}$$

للأسعار

$$= \frac{100\% \times \frac{100}{100}}{100\%}$$

(ب) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رق. ن. ب.} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\frac{100}{\text{ك}}}} \times 100\%$$

حيث ك: عدد السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي.

(٢) الأرقام القياسية البسيطة للكميات وهي:

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات:

إذا كان (ك) هو الكمية في سنة المقارنة و (كس) هي الكمية في سنة الأساس فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رق. ن. ب. للكميات} = \frac{\sum \frac{1}{\text{ك}}}{\sum \frac{1}{\text{كس}}} \times 100\%$$

(ب) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رق. ن. ب. للكميات} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\frac{100}{\text{ك}}}} \times 100\%$$

حيث ك: عدد السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي.

مثال (٣):

الجدول التالي يمثل أسعار وكميات خمس سلع علمي ١٩٩٣، ١٩٩٥.

السلعة	السعر عام ١٩٩٣	السعر عام ١٩٩٥	الكمية عام ١٩٩٣	الكمية عام ١٩٩٥
أ	٩	١٠	١٠	٢٠
ب	١٠	١٠	١٥	١٥
جـ	٤٠	٤٥	٢٠	٤٠
د	١٨	٢٠	١٥	٣٠
هـ	١٠	٢٠	١٠	١٥

باعتبار سنة ١٩٩٣ هي الأساس. المطلوب:

(١) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.

(٢) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

(٣) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.

(٤) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات.

الحل:

$$(١) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = \frac{\sum_{\text{ع}} ١٩ \times 100}{\sum_{\text{ع}}}$$

$$= 100 \times \frac{20+20+40+10+10}{10+18+40+10+9}$$

$$= 120,69 = 100 \times \frac{100}{87}$$

$$(٢) \text{ الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار } = \frac{\sum_{\text{ك}} \left(\frac{١٩}{١٠٠} \right)}{\sum_{\text{ك}}}$$

$$= 100 \times \left(\frac{20}{10} + \frac{20}{18} + \frac{40}{40} + \frac{10}{10} + \frac{10}{9} \right) \frac{1}{5}$$

$$= 136,94$$

$$(٣) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات } = \frac{\sum_{\text{ك}} ١٩ \times \frac{\text{ك}}{100}}{\sum_{\text{ك}}}$$

$$= 100 \times \frac{10+20+40+10+20}{10+10+20+10+10}$$

$$= 118,43 = 100 \times \frac{120}{100}$$

$$(٤) \text{ الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات } = \frac{\sum_{\text{ك}} \left(\frac{\text{ك}}{100} \right)}{\sum_{\text{ك}}}$$

$$\begin{aligned}
& 100 \times \left(\frac{10}{10} + \frac{30}{10} + \frac{40}{20} + \frac{10}{10} + \frac{20}{10} \right) \frac{1}{5} = \\
& 100 \times (1,0 + 3 + 2 + 1 + 2) \times \frac{1}{5} = \\
& 170 = 100 \times \frac{1,7}{1} =
\end{aligned}$$

ويمكن تركيب رقم قياسي يعتمد على السعر والكمية معاً ويعرف بالرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم وتعطى معادلته بالمعادلة التالية:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم} = 100 \times \frac{\sum p \times q}{\sum q}$$

بالرجوع إلى المثال السابق فإن:

الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة

$$\begin{aligned}
100 \times \frac{20 \times 10 + 20 \times 30 + 40 \times 40 + 10 \times 10 + 10 \times 20}{10 \times 10 + 10 \times 10 + 40 \times 20 + 10 \times 10 + 9 \times 10} &= \\
100 \times \frac{300 + 600 + 1600 + 100 + 200}{100 + 100 + 800 + 100 + 90} &= \\
216,36 = 100 \times \frac{300}{1410} &=
\end{aligned}$$

(٨-٤-٢) الأرقام القياسية المرجحة،

لاحظنا في المثال السابق بأن الرقم القياسي قد يتأثر بشكل كبير بلحى السلع الداخلة في حسابه بالرغم قد تكون هذه السلعة ليس لها أهمية كبيرة ولعلاج مثل هذا الوضع نعطي كل مادة داخلية في تركيب الرقم القياسي أهمية عدية تتناسب مع أهميتها في السوق أو الحيلة.

وطبقاً لهذا الأسلوب يطلق على الأرقام القياسية التي تتمتع بهذه الخاصية الأرقام القياسية المرجحة والأرقام القياسية المرجحة على نوعين:

أولاً: الأرقام القياسية المرجحة للأسعار:

وهي أربع أرقام:

١- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس: (رقم لاسبير للأسعار):

فإذا كان (ع) هي السعر في سنة المقارنة و (عر) السعر في سنة الأساس و (كس) الكمية في سنة الأساس وبالتالي فإن رقم لاسبير للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم لاسبير للأسعار} = \frac{\sum E_s K_s}{\sum E_{s0} K_s} \times 100\%$$

٢- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (رقم باش للأسعار):

إذا كان (ع) هو السعر في سنة المقارنة و (عر) السعر في سنة الأساس و (ك) الكمية في سنة المقارنة فإن رقم باش للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\sum E_s K_s}{\sum E_{s0} K_s} \times 100\%$$

٣- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (رقم فيشر للأسعار):

ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{\text{رقم لاسبير للأسعار} \times \text{رقم باش للأسعار}} \%$$

ويهتم هذا الرقم بالناحية الرياضية فقط ولكن لا معنى اقتصادي له.

٤- رقم مارشال للأسعار:

ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم مارشال للأسعار} = \frac{\sum E_s \left(K_s + \frac{K_{s0}}{2} \right)}{\sum E_{s0} \left(K_s + \frac{K_{s0}}{2} \right)} \times 100\%$$

نلاحظ بأن مارشال رجح بالوسط الحسابي لكميات الأساس والمقارنة.

ثانياً: الأرقام القياسية المرجحة للكميات:

وهي أربع أرقام:

(١) الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس (رقم لاسبير للكميات):

إذا كان (ع) هو السعر في سنة الأساس و (ك) هي الكمية في سنة الأساس (ك) هي الكمية في سنة المقارنة فإن معادلة رقم لاسبير للكميات تعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم لاسبير للكميات} = \frac{\sum K_p \times E_p}{\sum K_b \times E_p} \times 100\%$$

(٢) الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة المقارنة (رقم باش للكميات):

إذا كان (ع) هو السعر في سنة المقارنة و (ك) هو الكمية في سنة المقارنة و (ك) هي الكمية في سنة الأساس فإن معادلة رقم باش للكميات تعطى كالتالي:

$$\text{رقم باش للكميات} = \frac{\sum K_p \times E_p}{\sum K_b \times E_p} \times 100\%$$

(٣) الرقم القياسي الأمثل للكميات (رقم فيشر للكميات):

$$\text{رقم فيشر للكميات} = \sqrt{\text{رقم لاسبير للكميات} \times \text{رقم باش للكميات}} \times \%$$

(٤) رقم مارشال للكميات:

$$\text{رقم مارشال للكميات} = \frac{\sum K_p \times E_p \times E_b}{\sum K_b \times E_p \times E_b} \times 100\%$$

ونلاحظ بأن الأرقام القياسية المرجحة تعتمد على أوزان أو أسعار متغيرة بمعنى أنها تتغير إذا تغيرت نقط المقارنات فرقم لاسبير يتغير إذا تغيرت نقطة الأساس ورقم باش يتغير إذا تغيرت نقطة المقارنة ورقم مارشال يتغير إذا تغيرت الأساس أو المقارنة أو كليهما.

مثال (٤):

الجدول التالي يمثل أسعار وكميات أربع سلع في عامي ١٩٩٥، ١٩٩٧ باعتبار سنة ١٩٩٥ هي سنة الأساس المطلوب:

(١) رقم لاسير للأسعار.

(٢) رقم باش للأسعار.

(٣) رقم مارشل للأسعار.

(٤) رقم فيشر للأسعار.

(٥) رقم لاسير للكميات.

(٦) رقم باش للكميات.

(٧) رقم فيشر للكميات.

(٨) رقم مارشل للكميات.

السلعة	السعر عام ١٩٩٥	السعر عام ١٩٩٧	الكمية عام ١٩٩٥	الكمية عام ١٩٩٧
أ	٦	٢٤	١٨	٣٦
ب	١٦	٣٢	١٤	٢٨
جـ	٣٦	١٨	١٠	٢٠
د	٨	١٠	١٢	١٤
المجموع	٦٦	٨٤	٥٤	٩٨

الحل:

بتكوين جدول على النحو التالي:

السلعة	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك	ع	ك
أ	٦	٢٤	١٨	٣٦	١٠٨	٢١٦	٤٣٢	٨٦٤	٥٤	٣٣٤	١٢٩٦	٣٠	٥٤٠	١٠٨٠						
ب	١٦	٣٢	١٤	٢٨	٢٢٤	٤٤٨	٨٩٦	٤٢	٣٣٤	١٢٩٦	٣٠	٥٤٠	١٠٨٠							
ج	٣٦	١٨	١٠	٢٠	٣٦٠	٧٢٠	١٤٠	٣٦٠	٣٠	٢٠٨	٢٦٠	١٨	٢١٦	٢٥٢						
د	٨	١٠	١٢	١٤	٩٦	١١٢	١٢٠	١٤٠	٣٦	٢٠٨	٢٦٠	١٨	٢١٦	٢٥٢						
المجموع	٦٦	٨٤	٥٤	٩٨	٧٨٨	١٤٩٦	١١٨٠	٢٣٦٠	٢٢٨٤	٣٢٤٠	١٩٦٨			٣٧٥٦						

$$(١) \text{ رقم لاسبير للأسعار} = \frac{\sum \text{ع} \times \text{ك}}{\sum \text{ع} \times \text{ك}} \times 100$$

$$149,75 = 100 \times \frac{1180}{788}$$

$$(٢) \text{ رقم بلش للأسعار} = \frac{\sum \text{ع} \times \text{ك}}{\sum \text{ع} \times \text{ك}} \times 100$$

$$101,06 = 100 \times \frac{770}{761}$$

$$(٣) \text{ رقم مارشك للأسعار} = \frac{\sum \left(\frac{\text{ك}}{\text{ك} + \text{ك}} \right) \times \text{ع}}{\sum \left(\frac{\text{ك}}{\text{ك} + \text{ك}} \right) \times \text{ع}} \times 100$$

$$100,61 = 100 \times \frac{7740}{7784}$$

$$(٤) \text{ رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{\frac{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم بلش}}{\text{رقم مارشك}}}$$

$$100,4 = \sqrt{\frac{101,06 \times 149,75}{7784}}$$

$$(٥) \text{ رقم لاسبير للكميات} = \frac{\sum \text{ع} \times \text{ك}}{\sum \text{ع} \times \text{ك}} \times 100$$

$$189,80 = 100 \times \frac{1496}{788}$$

$$(٦) \text{ رقم بلش للكميات} = \frac{\sum \text{ع} \times \text{ك}}{\sum \text{ع} \times \text{ك}} \times 100$$

$$\%191,03 = \%100 \times \frac{2360}{1180} =$$

$$(٧) \text{ رقم فيشر للكميات} = \sqrt{\text{رقم لاسبير للكميات} \times \text{رقم باش للكميات}} \% \\ \%190,69 = \% \sqrt{191,03 \times 189,80} =$$

$$(٥) \text{ رقم مارشل للكميات} = \frac{\sum_{r=1}^K (E_r + E_r)}{\sum_{r=1}^K (E_r + E_r)} \%100 \times$$

$$\%190,80 = \%100 \times \frac{2706}{1421} =$$

نلاحظ من الحل بأن رقمي مارشل وفيشر متقاربين في القيمة.

تمارين الوحدة الثامنة

س١. ما هي استخدامات الرقم القياسي؟

س٢. عرف المفاهيم التالية:

الرقم القياسي، سنة الأساس، سنة المقارنة.

س٣. وضح كيف يتم اختيار سنة الأساس وما هي صفاتها؟

س٤. فيما يلي جدول يبين أسعار وكميات مبيعات مجموعة من السلع التي بيعت في عامي ١٩٨٥، ١٩٨٧.

السلعة	سعر الوحدة		كمية المبيعات	
	عام ١٩٨٥	عام ١٩٨٧	عام ١٩٨٥	عام ١٩٨٧
أ	٣٦	٣٢	٣٠٠	٣٨٠
ب	٢٨	٥٢	٤٠٠	٤٥٠
ح	٢١	٢٧	٥٠٠	٥٦٠
د	٢٦	١٨	٦٠٠	٨٠٠
هـ	٤٠	٣٢	٧٠٠	١٠٠٠

المطلوب:

- (١) استخراج منسوب السعر للسلعة أ، ح
- (٢) استخراج منسوب الكمية للسلعة د، هـ
- (٣) استخراج الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.
- (٤) استخراج الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.
- (٥) استخراج الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.
- (٦) استخراج الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات.

(٧) رقم لاسبير للأسعار.

(٨) رقم لاسبير للكميات.

(٩) رقم باش للأسعار.

(١٠) رقم باش للكميات.

(١١) رقم فيشر للأسعار.

(١٢) رقم فيشر للكميات.

(١٣) رقم مارشال للأسعار.

(١٤) رقم مارشال للكميات.

س٥، لنفترض بأن لدينا مصنع ينتج ثلاث سلع أ، ب، ح وأن كمية الإنتاج وسعر البيع من المصنع لهذه السلع في عامي ١٩٩٧، ١٩٩٩ كما يلي:

السلعة	الأسعار		كمية الإنتاج	
	عام ١٩٩٧	عام ١٩٩٩	عام ١٩٩٧	عام ١٩٩٩
أ	٨٠	٨١	٨٠	٩٠
ب	٨١	٨٥	١١٠	١٠٠
ح	٨٢	٨٤	٩٠	٨٠
المجموع	٢٤٣	٢٥٠	٢٨٠	٢٧٠

معتبراً سنة ١٩٩٧ هي الأساس احسب ما يلي:

(١) رقم لاسبير للأسعار.

(٢) رقم باش للكميات.

س٦، إذا كان رقم لاسبير للأسعار يساوي ١١٧,٦٪ ورقم فيشر للأسعار يساوي ١٢٠,٢٪ أوجد رقم باش للأسعار.

س٧: إذا كان الرقم القياسي للتكاليف المعيشة عام ١٩٩٩ يساوي (٣) باعتبار سنة ١٩٩٨ هي الأساس بينما الرقم القياسي لدخل الفرد عام ١٩٩٩ يساوي (٢,٨) باعتبار سنة ١٩٩٨ هي الأساس أوجد القوة الشرائية لدخل الفرد.

س٨: الجدول التالي يبين أسعار وكميات أجهزة الكمبيوتر المباعة في إحدى الشركات المحلية في السنوات ٢٠٠٠، ٢٠٠١، ٢٠٠٢ كما في الجدول:

الكميات (جهاز)			الأسعار بالدينار الأردني			نوع الجهاز
عام ٢٠٠٢	عام ٢٠٠١	عام ٢٠٠٠	عام ٢٠٠٢	عام ٢٠٠١	عام ٢٠٠٠	
٥٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٥٠	٢٠٠	بنتيوم I
٨٠٠	١١٠٠	١٠٠٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٥٠	بنتيوم II
١٨٠٠	١٦٠٠	١٥٠٠	٣٠٠	٤٥٠	٥٥٠	بنتيوم III
٢٠٠٠	١٠٠٠	٥٠٠	٥٥٠	٦٥٠	٧٥٠	بنتيوم IV

باعتبار سنة ٢٠٠٠ هي الأساس المطلوب:

(١) منسوب القيمة للجهاز بنتيوم II، III.

$$\left(\frac{\text{السعر} \times \text{الكمية في سنة المقارنة}}{\text{السعر} \times \text{الكمية في سنة الأساس}} = \text{منسوب القيمة} \right)$$

(٢) الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة.

(٣) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.

(٤) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.

(٥) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

(٦) رقم مارشال للأسعار.

(٧) رقم مارشال للكميات.

السلاسل الزمنية

The Time Series

مقدمة.

(١-٩) معامل الحشونة والمعدلات المتحركة.

(٢-٩) تحليل السلسلة الزمنية.

(٣-٩) طرق تقدير الاتجاه العام.

(٤-٩) تقدير التغيرات الموسمية.

تمارين الوحدة.

السلاسل الزمنية

The Time Series

مقدمة:

يمرور الزمن فإن معظم الظواهر تتعرض للتغير. ففي حين تحتلج بعض الظواهر لمدة سنة أو أكثر لتتغير فإن البعض الآخر قد يتعرض كل لحظة أو كل دقيقة أو ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر. وبالتالي يمكن تعريف السلسلة الزمنية بأنها البيانات الإحصائية التي أخذت أو سجلت عن ظاهرة ما خلال فترات زمنية متتالية والفترة الزمنية كما أسلفنا قد تكون دقيقة أو ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر أو سنة أو أكثر.

وعلى سبيل المثال الجدول التالي يبين إنتاج أحد المصانع للأسمنت (بالآلاف الأطنان) خلال الفترة من ١٩٩٠ إلى ١٩٩٦:

السنة	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
الإنتاج	٣٥٠	٣٢٠	٤٠٠	٤٥٠	٥٠٠	٤٣٠	٤١٠

نلاحظ بأن أي سلسلة زمنية تحتوي على متغيرين. الأول هو الزمن ويعتبر هذا المتغير مستقل. أما الثاني فهو قيمة الظاهرة قيد الدراسة ويعتبر المتغير التابع.

وتهدف دراسة السلاسل الزمنية إلى:

- (١) وصف سلوك الظاهرة في الماضي.
- (٢) تحليل هذا السلوك للتنبؤ بسلوكها في المستقبل.

(١-٩) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة:

عند رسم المنحنى البياني المار بالنقط (الزمن، قيمة الظاهرة) نحصل على منحنى غير أملس نتيجة التغيرات المتعلقة التي تحدث في الفترات الزمنية الطويلة التي أخذت منها بيانات السلسلة الزمنية.

تعريف:

لتكن $س_١, س_٢, س_٣, ... س_n$ عناصر السلسلة الزمنية التي أخذت في الأزمان ١, ٢, ... ن فإن معامل الخشونة لهذه السلسلة الزمنية والذي سنرمز له بالرمز (م.خ) يعطى وفق المعادلة التالية:

$$م.خ = \frac{\sum_{j=1}^n (س_j - س_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^n (س_j - س_{j-2})^2}$$

وكما قل هذا المعامل نسبيا كلما كانت السلسلة الزمنية ملساء أكثر.

مثال (١):

البيانات الآتية تمثل عدد الخريجين من إحدى كليات المجتمع في الفترة الزمنية

(١٩٩٠ - ١٩٩٩).

السنة	عدد الخريجين بالآلاف	السنة	عدد الخريجين بالآلاف
١٩٩٠	١٨	١٩٩٥	١١
١٩٩١	١٧	١٩٩٦	١٢
١٩٩٢	١٢	١٩٩٧	١٣
١٩٩٣	١١	١٩٩٨	١٤
١٩٩٤	٩	١٩٩٩	١٥

المطلوب:

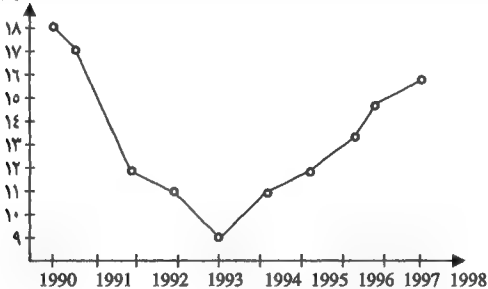
(١) رسم المنحنى التاريخي لهذه السلسلة الزمنية.

(٢) معامل الخشونة لهذه السلسلة.

الحل:

نقوم برسم محورين متعامدين نضع على الرأسي (قيمة الظاهرة)، وعلى الأفقي الزمن نلاحظ بأن سلوك هذه الظاهرة مرة بالزيادة وأخرى بالنقصان وبالتالي فإن هذه السلسلة متعرجة.

عدد المخرجين بالثلاث



(٢) نقوم أولاً: بإيجاد الوسط الحسابي لعناصر السلسلة الزمنية كما يلي:

$$\frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})}$$

ثانياً: نكون جدول الحل كالتالي:

الزمن	س _ر	س _{ر-1}	س _{ر-1} - س _{ر-2}	(س _{ر-1} - س _{ر-2}) ²	(س _ر - س _{ر-1})	(س _ر - س _{ر-1}) ²
١	١٨	-	-	-	-	-
٢	١٧	١٨	١-	١	٣,٨	١٤,٤٤
٣	١٢	١٧	٥-	٢٥	١,٢-	١,٤٤
٤	١١	١٢	١-	١	٢,٢-	٤,٨٤
٥	٩	١١	٢-	٤	٤,٢-	١٧,٦٤
٦	١١	٩	٢	٤	٢,٢-	٤,٨٤
٧	١٢	١١	١	١	١,٢-	١,٤٤
٨	١٣	١٢	١	١	٠,٢-	٠,٠٤
٩	١٤	١٣	١	١	٠,٨	٠,٦٤
١٠	١٥	١٤	١	١	١,٨	٣,٢٤
المجموع				٣٩		٤٨,٥٦

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (س_{ر-1} - س_{ر-2})^2}{\sum_{i=1}^n (س_{ر} - س_{ر-1})} = \frac{٣٩}{٤٨,٥٦} = ٠,٨٠٣$$

ونلاحظ بأن معامل الخشونة كبير نسبياً وبالتالي يصعب تحليل مثل هذه السلسلة الزمنية.

تعريف:

لتكن لدينا السلسلة الزمنية س_١، س_٢، ...، س_ن والتي أخذت في الأزمنة ١، ٢، ...، ن فيتم تعريف المعدل المتحرك بطول (ك) والذي سنرمز له بالرمز (م) بالمعادلة التالية:

$$م = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_١٠ + (١-٥)}{ك} \quad \text{حيث } ر = ١, ٢, ...$$

مثال (٢):

بالرجوع إلى السلسلة الزمنية الموجودة في المثال السابق احسب سلسلة المعدلات المتحركة بطول (٥).

الحل:

$$\frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥}{٥} = ١٢ = \text{رقم (١)}$$

$$١٣,٤ = \frac{٦٧}{٥} = \frac{٩ + ١١ + ١٢ + ١٧ + ١٨}{٥}$$

$$١٢ = \frac{٦٠}{٥} = \frac{١١ + ٩ + ١١ + ١٢ + ١٧}{٥} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥}{٥} = ١٢$$

$$١١ = \frac{٥٥}{٥} = \frac{١٢ + ١١ + ٩ + ١١ + ١٢}{٥} = \frac{س_٢ + س_٣ + س_٤ + س_٥ + س_٦}{٥} = ١١$$

$$١١,٢ = \frac{٥٦}{٥} = \frac{١٣ + ١٢ + ١١ + ٩ + ١١}{٥} = \frac{س_٣ + س_٤ + س_٥ + س_٦ + س_٧}{٥} = ١١,٢$$

$$١١,٨ = \frac{٥٩}{٥} = \frac{١٤ + ١٣ + ١٢ + ١١ + ٩}{٥} = \frac{س_٤ + س_٥ + س_٦ + س_٧ + س_٨}{٥} = ١١,٨$$

$$١٣ = \frac{٦٥}{٥} = \frac{١٥ + ١٤ + ١٣ + ١٢ + ١١}{٥} = \frac{س_٥ + س_٦ + س_٧ + س_٨ + س_٩}{٥} = ١٣$$

وبالتالي فإن سلسلة المعدلات المتحركة هي:

$$١٣, ١١,٨, ١١, ١١,٢, ١١, ١٣, ١٣,٤$$

(٢-٩) تحليل السلسلة الزمنية:

إن دراسة أي سلسلة زمنية تستدعي تحليلها إلى عناصرها وثاني أهمية التحليل لمعرفة تطور الظاهرة مع مرور الزمن ومعرفة سلوكها والتنبؤ بعملها خلال فترات مقبلة لتتخذ أساساً للتخطيط الاقتصادي. وتتألف السلسلة الزمنية من أربعة عناصر أساسية هي:

- (١) الاتجاه العام (القيم الاتجاهية) ونرمز له بالرمز (ت).
 - (٢) التغيرات الموسمية (القيم الموسمية) ونرمز له بالرمز (م).
 - (٣) التغيرات الدورية (القيم الدورية) ونرمز له بالرمز (د).
 - (٤) التغيرات العرضية (القيم العرضية) ونرمز له بالرمز (ع).
- وبالتالي فإن كل قيمة أصلية (ص) من قيم الظاهرة في كل سنة من السنوات يمكن وصفها بالشكل التالي:

$$\text{ص} = \text{ت} \times \text{م} \times \text{د} \times \text{ع}$$

إلا أن بعض الإحصائيين يكتبها $\text{ص} = \text{ت} + \text{م} + \text{د} + \text{ع}$.

ودراسة سلسلة زمنية ما تستدعي دراسة كل عنصر من هذه العناصر.

أولاً، الاتجاه العام:

والاتجاه العام يعني التغير العام في المدى الطويل لهذه السلسلة الزمنية وليس هناك أن يكون للاتجاه العام شكل معين ثابت ولكن تعني أن هناك حركة دائمة في اتجاه معين (أعلى أو أسفل) والعوامل المختلفة التي تشكل الاتجاه العام لأي ظاهرة تؤدي إلى زيادة قيمة الظاهرة أو نقصها.

وفي معظم الأحيان يكون تأثير تلك العوامل بصورة منتظمة بشكل بطيء وصغير ويظهر تأثيرها بعد فترة طويلة من الزمن وذلك ما يجعلنا نصف الاتجاه العام بأنه التغير في المدى الطويل لتلك الظاهرة، وبالتالي لا يكون الاتجاه العام للظاهرة عرضة للتغيرات العرضية سواء بالزيادة أو النقصان. الاتجاه العام قد يمثل رياضياً بخط مستقيم أو منحني ويعتمد شكل الاتجاه العام على نوع النمو للظاهرة قيد الدراسة.

ثانياً، التغيرات الموسمية:

والموسم في السلسلة الزمنية نعني به الفترة الزمنية التي هي أقل من سنة فقد تكون ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر أو ربع سنة ... الخ. وباختلاف نوع الظاهرة وظروفها تختلف الفترة الزمنية التي يبرورها تتكرر الظاهرة نفسها. وبالتالي يمكن

تعريف التغيرات الموسمية هي تلك التغيرات التي تكرر نفسها بالنسبة لظاهرة ما خلال تلك الفترة الزمنية.

فمثلاً درجة الحرارة لها دورة يومية حيث تبدأ درجة الحرارة منخفضة في أول اليوم ثم تزداد تدريجياً خلال اليوم حتى تصل إلى أعلى مستوى لها في منتصف النهار لتعود إلى الانخفاض التدريجي حين تقترب من نهاية اليوم ثم تبدأ منخفضة في اليوم التالي وتزداد تدريجياً وهكذا تتكرر الدورة كل يوم وبالتالي فهذه التغيرات الموسمية مدتها يوم واحد. وكذلك على التغيرات الموسمية التي مدتها أسبوع هي أعداد المصلين لصلاة الجمعة وكذلك على التغيرات الموسمية التي مدتها ربع سنة هي الفصول الأربعة.

ثالثاً: التغيرات الدورية:

كما تحدث التغيرات الموسمية بشكل منتظم فإن التغيرات الدورية تحدث أيضاً بشكل منتظم ولكن على فترات متباعدة ففي حين تكون التغيرات الموسمية مدتها أقل من سنة فإن التغيرات الدورية مدتها أكثر من سنة وقد تمتد لعشرة سنوات أو عشرون سنة.. وهذه التغيرات يصعب التنبؤ بها ولكن تعتمد على المعاملات الاقتصادية في البلد وتختلف من بلد إلى آخر ومن الأمثلة عليها حالة الكساد والرواج الاقتصادي. لذلك فطول الدورة هي تلك الفترة التي غضي قبل أن تستعيد الظاهرة حالتها العادية.

رابعاً: التغيرات العرضية أو الفجائية:

وهي التغيرات التي تحدث نتيجة أسباب عرضية أو طارئة وهذه التغيرات يمكن تقسيمها إلى قسمين:

أ) التغيرات التي تعتمد على الصلابة البحتة وهي التغيرات العشوائية وتحدث تغيرات في السلسلة لا يمكن التنبؤ بها فتارة تكون في الجبل وأخرى تكون في آخر بصورة عشوائية.

ب) التغيرات التي تعتمد على عوامل فجائية طارئة ولكنها قوية تظهر من وقت لآخر كالحروب والزلازل والأمراض وغيرها.

(٣-٩) طرق تقدير معادلة الاتجاه العام (القيم الاتجاهية للظاهرة):

الهدف من تقدير الاتجاه العام للظاهرة هو وصف الظاهرة أو الحركة العامة للظاهرة، ويتم ذلك عن طريق الرسم البياني للظاهرة فإذا كان انتشار هذه النقاط يمكن تمثيلها بخط مستقيم فيكون الاتجاه العام مستقيماً إما صاعداً من الأسفل إلى الأعلى مشيراً إلى زيادة قيمة الظاهرة بمرور الزمن، وأما إذا كان هابطاً من أعلى إلى أسفل فإن ذلك يعني أن الظاهرة تدرج في التناقص مع مرور الزمن.

من ناحية أخرى فقد لا يأخذ الاتجاه العام شكل الخط المستقيم بل شكل منحنى فإن تمثيله رياضياً يتطلب اللجوء إلى معادلات أعلى من الدرجة الأولى. وبشكل عام فعندما يتم تمهيد خط أو منحنى الاتجاه العام فإنه يتوافر لدينا لكل وحدة زمنية قيمتان إلا وهي القيمة الحقيقية للظاهرة (ص) والقيمة الاتجاهية المقدرة (ص').

هنالك عدة طرق لتقدير الاتجاه العام (القيم الاتجاهية) تتفاوت في دقتها وهذه الدقة تتحدد بمقارنة القيمة الحقيقية مع القيمة الاتجاهية ومن هذه الطرق:

(١) طريقة التمهيد باليد،

تعتبر هذه الطريقة أسهل الطرق، ويتم فيها رسم محورين أحدهما رأسي يعبر عن القيم للظاهرة والثاني أفقي يعبر عن الزمن ثم نقوم بتعيين الإحداثيات (الزمن، قيمة الظاهرة) ثم نوصل هذه النقاط لنحصل على منحنى القيم المشاهدة فإذا كان شكل الاتجاه العام مستقيماً فتكون معادلة الاتجاه العام معادلة خط مستقيم وإذا كان منحنى فقد تكون معادلته من الدرجة الثانية أو أكثر.

وبالنظر إلى شكل المنحنى للقيم المشاهدة يقوم محلل السلسلة بتمهيد خط أو منحنى للقيم الاتجاهية معتمداً على قدرته وخبرته حتى يمر هذا الخط أو المنحنى بأكبر عدد من النقاط للقيم المشاهدة.

وتعتبر هذه الطريقة أقل الطرق دقة لأنها تعتمد على مهارة المحلل.

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

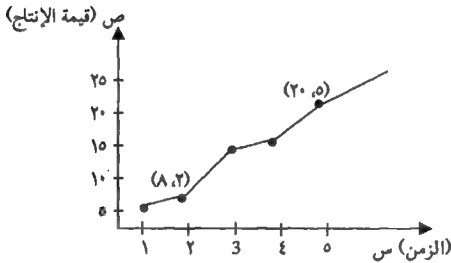
مثال (٣)،

الجدول التالي يمثل إنتاج المملكة بالآلاف الأطنان من الإسمنت خلال السنوات (١٩٨٠-١٩٨٤).

السنة	الزمن (س)	قيمة الإنتاج (ص)
١٩٨٠	١	٥
١٩٨١	٢	٨
١٩٨٢	٣	١٢
١٩٨٣	٤	١٥
١٩٨٤	٥	٢٠

الحل،

نقوم برسم محوري الإحداثيات ثم نقوم بتعيين الإحداثيات (س، ص).



نقوم بتعويض في معادلة الخط المستقيم $ص = م س + ح$ حيث أن الخط المستقيم يمر بالنقطتين (٢٠، ٥)، (٨، ٢) كالتالي:

$$٨ = ٢ م + ح \quad (١)$$

$$٢٠ = ٥ م + ح \quad (٢)$$

بضرب المعادلة الأولى بـ (١-) وجمعها للثانية ينتج:

$$١٢ = ٣م \Leftarrow م = ٤$$

بالتعويض عن قيمة (م) في (١) ينتج بأن ح = صفر

∴ المعادلة هي: ص = ٤ س.

(٢) طريقة نصف السلسلة:

في هذه الطريقة نقوم بتقسيم السلسلة الزمنية إلى قسمين، ثم نجد الوسط الحسابي لقيم الظاهرة (ص) لكل قسم والوسط الحسابي لقيم الزمن (س) لكل قسم ثم نستخدم القيمتين المتوسطتين $(\overline{ص_١}, \overline{س_١})$ ، $(\overline{ص_٢}, \overline{س_٢})$ ليمثلا نقطتين على الخط المستقيم ثم نوجد معادلته.

ولتوضيح هذه الطريقة نطرح المثال التالي:

مثال (٤):

الجدول التالي يبين إنتاج الملكة من الفوسفات (بالآلاف الأطنان) خلال

السنوات (١٩٨٠-١٩٨٩).

السنة	الزمن (س)	قيمة الظاهرة (ص)
١٩٨٠	١	٥
١٩٨١	٢	٨
١٩٨٢	٣	١٢
١٩٨٣	٤	٢٠
١٩٨٤	٥	٣٣
١٩٨٥	٦	٢٥
١٩٨٦	٧	٣٧
١٩٨٧	٨	٢٨
١٩٨٨	٩	٢٩
١٩٨٩	١٠	٣٠

الحل:

نقوم بتقسيم السلسلة إلى قسمين متساويين حيث القسم الأول يشمل الخمس السنوات الأولى والقسم الثاني يشمل الخمس السنوات الثانية.

السنة	الزمن (س)	قيمة الظاهرة (ص)	
١٩٨٠	١	٥	$3 = \frac{15}{5} = \frac{5+4+3+2+1}{5} = \frac{1}{5}$
١٩٨١	٢	٨	$\frac{٢٣+٢٠+١٢+٨+٥}{٥} = \frac{1}{5}$
١٩٨٢	٣	١٢	$١٣,٦ = \frac{٢٨}{٥} =$
١٩٨٣	٤	٢٠	
١٩٨٤	٥	٢٣	
١٩٨٥	٦	٢٥	$٨ = \frac{٤٠}{٥} = \frac{١٠+٩+٨+٧+٦}{٥} = \frac{1}{5}$
١٩٨٦	٧	٢٧	$\frac{٣٠+٢٩+٢٨+٢٧+٢٥}{٥} = \frac{1}{5}$
١٩٨٧	٨	٢٨	$٢٧,٨ =$
١٩٨٨	٩	٢٩	
١٩٨٩	١٠	٣٠	

نقوم الآن بإيجاد معادلة الخط المستقيم والتي تمثل معادلة الاتجاه العام المار بالنقطتين (٣، ١٣,٦)، (٨، ٢٧,٨) كالتالي:

معادلة الخط المستقيم (معادلة الاتجاه العام) هي: ص = م س + ح بالتعويض بالنقطتين في المعادلة:

$$(١) \dots\dots\dots ٣ = ١٣,٦ م + ح$$

$$(٢) \dots\dots\dots ٢٧,٨ = ٨ م + ح$$

ب طرح المعادلة (١) من (٢) ينتج:

$$\begin{aligned} ١٤,٢ - ٥ م \\ ٢,٨٤ = \frac{١٤,٢}{٥} = م \leftarrow \end{aligned}$$

بالتعويض في (١) ينتج:

$$١٣,٦ = ٨,٥٢ + ح \leftarrow ح = ٥,٠٨$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$$ص = ٢,٨٤ س + ٥,٠٨$$

ملاحظة: إذا كان عدد السنوات فردياً فإننا نقوم بحذف السنة الواقعة في المنتصف.

(٣) طريقة المعدلات المتحركة:

تعتمد هذه الطريقة على أخذ متوسطات متتابة متداخلة والنتيجة هي إزالة التمرجات التي تظهر في المنحنى التاريخي للسلسلة. وتكمن أهمية هذه الطريقة إذا رسمنا السلسلة الزمنية الأصلية ثم رسمنا على نفس المستوى سلسلة المعدلات المتحركة فنجد بأن الخط البياني قد تغير شكله بحيث لم يصبح متعرجاً وأصبح في صورة خط مستقيم وما يجب ملاحظته بأن الخط المتعرج ليس دائماً خطأً مستقيماً ففي هذه الحالة نلجأ إلى أخذ سلسلة متوسطات متحركة أخرى.

وتتخلص عيوب هذه الطريقة في الحصول على قيم اتجاهية تقل عن القيم المشاهدة (ص) ويزداد هذا العيب وضوحاً إذا كان عدد المشاهدات قليلاً وكذلك فإنه في هذه الطريقة لا نحصل على معادلة رياضية للاتجاه العام مما يجعل التنبؤ بقيم اتجاهية في فترة زمنية لاحقة أمراً مستحيلاً.

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

مثال (٥):

الجدول التالي يمثل عدد خريجي إحدى الكليات التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية بالثلاث خلال السنوات (١٩٩٠-١٩٩٧) [بيانات افتراضية].

السنة	الزمن (س)	قيمة المشاهد (ص)	المعدل المتحرك بطول ٣
١٩٩٠	١	١٢	-
١٩٩١	٢	١١	١٢
١٩٩٢	٣	١٣	١١
١٩٩٣	٤	٩	١٠
١٩٩٤	٥	٨	٩
١٩٩٥	٦	١٠	٩,٦٧
١٩٩٦	٧	١١	١١
١٩٩٧	٨	١٢	-

فلاحظ أن المعدل المتحرك الأول يقابل الوسيط لأول ثلاثة أزمنة وهو الزمن

الثاني.

(٤) طريقة المربعات الصغرى:

تعتبر هذه الطرق أفضل الطرق لأن في هذه الطريقة يتم تحديد معادلة الاتجاه العام على أساس أن يكون مجموع مربعات انحراف القيم المحسوبة عن القيم الأصلية أقل ما يمكن ومن هنا جاءت التسمية.

ولاستخدام هذه الطريقة يجب أن تحدد الشكل العام (الانتشار) للظاهرة وذلك برسم المنحنى التاريخي ومن هذا الرسم يتضح لنا إن كان الاتجاه العام يأخذ شكل الخط المستقيم أو منحنى من الدرجة الثانية أو أكثر.

فإذا كان الاتجاه العام على شكل خط مستقيم فإن معادلته هي:

$$ص = م س + ح$$

حيث م، ح هي معالم المعادلة المراد إيجادها باستخدام قيم س، ص المشاهد وسنقتصر دراستنا على معادلة الخط المستقيم فقط.

وفي هذه الحالة تكون معادلة الاتجاه العام هي معادلة الخط المستقيم:

$$\text{ص} = \text{م} + \text{ح} \\ \frac{\sum \text{ص} - \text{ك} \cdot \text{م}}{\sum \text{ص} - \text{ك} \cdot \text{م}} = \text{م} \quad \text{حيث م}$$

حيث ك: عدد السنوات (عدد عناصر السلسلة الزمنية).

$$\text{ح} = \text{م} - \text{ص}$$

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

مثال (٦):

الجدول التالي يبين الكميات المنتجة بالآلاف الأطنان من إنتاج أحد المصانع خلال السنوات (١٩٧١-١٩٨٠).

السنة	١٩٧١	١٩٧٢	١٩٧٣	١٩٧٤	١٩٧٥	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠
الإنتاج	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٥	١٨	٢٠	٢١

المطلوب:

(١) حساب معادلة خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

(٢) حساب القيم الاتجاهية (ص) خلال السنوات (١٩٧١-١٩٨٠) والتنبؤ بالكميات

المنتجة عام ١٩٨٥، ١٩٩٠.

الحل: بتكوين جدول الحل كالتالي:

السنة	الزمن (س)	قيمة الإنتاج (ص)	س ^٢	ص	ص (القيم الاتجاهية) = ١,٧٩ + ٢,٦٥٥ س
١٩٧١	١	٦	١	٦	ص = ١,٧٩ + ٢,٦٥٥ × ١ = ٤,٤٤٥
١٩٧٢	٢	٧	٤	١٤	ص = ١,٧٩ + ٢,٦٥٥ × ٢ = ٦,٢٣٥
١٩٧٣	٣	٨	٩	٢٤	ص = ١,٧٩ + ٢,٦٥٥ × ٣ = ٨,٠٢٥
١٩٧٤	٤	٩	١٦	٣٦	ص = ١,٧٩ + ٢,٦٥٥ × ٤ = ٩,٨١٥

١١,٦٠٥ = ٢,٦٥٥ + ٥ × ١,٧٩ = ص	٥٠	٢٥	١٠	٥	١٩٧٥
١٣,٣٩٥ = ٢,٦٥٥ + ٦ × ١,٧٩ = ص	٦٦	٣٦	١١	٦	١٩٧٦
١٥,١٨٥ = ٢,٦٥٥ + ٧ × ١,٧٩ = ص	١٠٥	٤٩	١٥	٧	١٩٧٧
١٦,٩٧٥ = ٢,٦٥٥ + ٨ × ١,٧٩ = ص	١٤٤	٦٤	١٨	٨	١٩٧٨
١٨,٧٦٥ = ٢,٦٥٥ + ٩ × ١,٧٩ = ص	١٨٠	٨١	٢٠	٩	١٩٧٩
٢٠,٥٥٥ = ٢,٦٥٥ + ١٠ × ١,٧٩ = ص	٢١٠	١٠٠	٢١	١٠	١٩٨٠
	٨٣٥	٣٨٥	١٢٥	٥٥	المجموع

معادلة الاتجه العام هي: ص = م س + ح

حيث:

$$\frac{147,5}{82,5} = \frac{\frac{125}{10} \times \frac{55}{10} \times 10 - 835}{\left(\frac{55}{10}\right) \times 10 - 385} = \frac{\sum \text{ص} - \text{م} \sum \text{س}}{\sum \text{س} - \text{م} \sum \text{س}} = \text{م}$$

$$1,79 =$$

$$\text{ح} = \text{ص} - \text{م} \text{س} = 12,5 - 0,5 \times 1,79 =$$

$$\therefore \text{المعادلة هي: ص} = 1,79 \text{ س} + 2,65$$

(٢) القيم الاتجاهية خلال السنوات (١٩٨٠-١٩٧١) واردة في جدول الحل.

للتنبؤ بالقيمة الاتجاهية لعام ١٩٨٥ نقول بأن:

عام ١٩٨٥ تقابل س = ١٥ والتعويض في معادلة الاتجه العام نرى:

$$\text{ص} = 29,505 = 2,65 + 15 \times 1,79$$

كذلك الحل لعام ١٩٩٠ تقابل س = ٢٠ والتعويض نجد أن:

$$\text{ص} = 38,450 = 2,65 + 20 \times 1,79$$

(٩-٤) تقدير التغيرات الموسمية:

تهدف دراسة التغيرات الموسمية إلى التعرف على أثر تغير الموسم على سلوك الظاهرة قيد الدراسة فإذا كانت الظاهرة تتغير من يوم لآخر فتكون الوحدة الزمنية لهذه الظاهرة هي اليوم وقد تتغير الظاهرة بتغير الفصول الأربعة فتكون الوحدة الزمنية هي الفصول الأربعة وقد تكون الوحدة الزمنية في التغيرات الموسمية أسبوعاً أو شهراً ... الخ.

لكي يتم تقدير أثر الموسم لظاهرة ما فيجب:

- (١) تحليل قيمة الظاهرة من أثر الاتجاه العام.
- (٢) تحليل قيمة الظاهرة من أثر التغيرات العرضية أو الدورية ويتم ذلك عن طريق استخدام فكرة المتوسطات.

لبيان كيفية حساب أثر التغيرات الموسمية نورد المثال التالي:

مثال (٧):

إذا كانت مبيعات أحد المتاجر (بالآلاف الدنانير) خلال ثلاثة أعوام (١٩٩٧-٢٠٠٠)

على النحو التالي:

٢٠٠٠	١٩٩٩	١٩٩٨	الفصل
٢٥	١٢	٩	الشتاء
١٧	١٥	١٢	الربيع
٢١	١٣	١٠	الصيف
١٩	١٧	١٤	الخريف
٨٢	٥٧	٤٥	المجموع

المطلوب: حساب أثر التغيرات الموسمية

الحل:

حساب أثر التغيرات الموسمية يجب أولاً تخلص القيم للسلسلة الزمنية من أثر الاتجاه العام، نستخدم طريقة المربعات الصغرى لإيجاد معادلة الاتجاه العام على فرض بأن معادلة الاتجاه العام هي معادلة خط مستقيم.

السنة	الموسم	ص	ص	ص ²	م ص	القيم الاتجاهية (ص)	القيم مخرصة من أثر الاتجاه العام
١٩٩٨	الشتاء	١	٩	١	٩	٩,٤٠٧	$\frac{9}{94.7} \times 100 = 9.5, 27\%$
	الربيع	٢	١٢	٤	٢٤	١٠,٤٨٤	$114, 46\%$
	الصيف	٣	١٥	٩	٣٠	١١,٥٦١	$186, 49\%$
	الخريف	٤	١٦	١٦	٥٦	١٢,٦٣٨	$110, 78\%$
١٩٩٩	الشتاء	٥	١٢	٢٥	٦٠	١٣,٧١٥	$187, 49\%$
	الربيع	٦	١٥	٣٦	٩٠	١٤,٧٩٢	$101, 4\%$
	الصيف	٧	١٣	٤٩	٩١	١٥,٨٦٥	$11, 94\%$
	الخريف	٨	١٧	٦٤	١٣٦	١٦,٩٤٦	$100, 36\%$
٢٠٠٠	الشتاء	٩	٢٥	٨١	٢٢٥	١٨,٠٢٣	$138, 71\%$
	الربيع	١٠	١٧	١٠٠	١٧٠	١٩,١	89%
	الصيف	١١	٢١	١٢١	٢٣٦	٢٠,١٧٧	$104, 07\%$
	الخريف	١٢	١٩	١٤٤	٢٢٨	٢١,٢٥٤	$189, 39\%$
المجموع	-	٧٨	١٨٤	٦٥٠	١٣٥٠		

$$\text{نجد } \bar{m} = \frac{78}{12} = 6,5 \text{، } \bar{v} = \frac{184}{12} = 15,33$$

معادلة الاتجاه العام هي: $v = m \times \text{ح} + \text{ح}$

$$\text{حيث م} = \frac{\sum \text{من ص} - \text{ك ص} \text{ من}}{\sum \text{من ص} - \text{ك ص} \text{ من}} = \frac{\frac{184}{12} \times 6,5 \times 12 - 1150}{\frac{1}{2}(6,5) \times 12 - 150}$$

$$1,07 = \frac{104}{123}$$

$$\text{ح} = \text{ص} - \text{م} = 10,23 - 1,07 \times 6,5 = 8,23$$

$$\therefore \text{ص} = 1,07 + 8,23$$

و يتم تخلص القيم الأصلية من أثر الاتجاه العام باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{\text{ص}}{\text{ص}} \times 100\%$$

النسب المئوية في العمود الأخير في الجدول تمثل أثر التغيرات الأخرى الموسمية والدورية والفجائية) على سلوك الظاهرة.

في المرحلة التالية يتم التخلص من أثر التغيرات الفجائية أو العرضية باستخدام المتوسطات ليبقى لدينا أثر التغيرات الموسمية والدورية.

وباستخدام سلسلة البيانات مخرصة من أثر الاتجاه العام وأثر التغيرات الفجائية يمكن أن يوجد دليلاً يساعد في حساب أثر الموسم على حركة الظاهرة ويطلق عليه "دليل الحركة الموسمية" ويتم الحصول عليه كالآتي:

الفصل	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	مجموع السنوات	المتوسط "الدليل الموسمي"
الشتاء	٩٥,٦٧	٨٧,٤٩	١٣٨,٧١	٣٢١,٨٧	$107,29 = \frac{321,87}{3}$
الربيع	١١٤,٤٦	١٠١,٤	٨٩	٣٠٤,٨٦	١٠١,٦٢
الصيف	٨٦,٤٩	٨١,٩٤	١٠٤,٠٧	٢٧٢,٥	٩٠,٨٣
الخريف	١١٠,٧٨	١٠٠,٣١	٨٩,٣٩	٣٠٠,٤٨	١٠٠,١٦
المجموع					٣٩٩,٩

مما يلاحظ أنه يجب أن تكون لدينا أكثر من سنة حتى يمكن التخلص من أثر التغيرات العرضية عن طريق أخذ متوسط السنوات المختلفة لكل فصل من فصول السنة، وكما تجدر الإشارة بأن المجموع للمتوسطات (لـ مجموع الدليل الموسمي) يجب أن يساوي عدد الفصول $100 \times$ وبالتالي فإن المتوسط العام يجب أن يساوي 100% وإن حدث وإن كان أقل أو أكثر فإن الفرق يوزع بالتناسب على المتوسطات الأربعة.

استبعاد التغيرات الموسمية:

بعد حساب التغيرات الموسمية التي ظهرت على شكل نسب أطلقنا عليها الدليل الموسمي فإنه يتم التخلص من أثر التغيرات الموسمية باستخدام المعادلة التالية:
القيمة المشاهدة (ص)

$$\text{القيمة مخرصة من أثر الموسمي} = \frac{\text{القيمة المشاهدة (ص)}}{100\%}$$

الدليل الموسمي

والجدول التالي يبين القيم مخرصة من الأثر الموسمي للمثل "مبيعات إحدى

المتاجر".

السنة	الفصل	ص	القيم مخرصة من الأثر الموسمي
١٩٩٨	الشتاء	٩	$100\% \times \frac{9}{107,29} = 8,39$
	الربيع	١٢	١١,٨
	الصيف	١٠	١٢,٢
	الخريف	١٤	١٣,٩٧
١٩٩٩	الشتاء	١٢	١١,٨
	الربيع	١٥	١٤,٧٦
	الصيف	١٣	١٤,٣٦
	الخريف	١٧	١٦,٩٧

٢٠٠٠	الشتاء	٢٥	٢٣,٣
	الربيع	١٧	١٦,٧٣
	الصيف	٢١	٢٣,١٢
	الخريف	١٩	١٨,٩٧

وكيفية حساب القيمة مخرصة من الأثر الموسمي لفصل الربيع (١٩٩٨-٢٠٠٠)

كالتالي:

$$\text{عام (١٩٩٨): } ١٢ \times \frac{١٠٠}{١٠١,٦٢} = ١١,٨$$

$$\text{عام (١٩٩٩): } ١٥ \times \frac{١٠٠}{١٠١,٦٢} = ١٤,٧٦$$

$$\text{عام (٢٠٠٠): } ١٥ \times \frac{١٠٠}{١٠١,٦٢} = ١٦,٧٣$$

ولتخليص قيم السلسلة الزمنية لظاهرة ما من أثر التغيرات الموسمية والاتجاه

العام نطبق المعادلة التالية:

قيمة المشاهدة للظاهرة

$$\text{التغيرات الدورية والعرضية} = \text{العام} \times \frac{\text{الدليل الموسمي}}{١٠٠\%}$$

الاتجاه العام × الدليل الموسمي

وعندها يظهر أثر التغيرات الدورية والعرضية فقط.

تمارين الوحدة التاسعة

س١: عرف المفاهيم التالية:

السلسلة الزمنية، الاتجاه العام، التغيرات الدورية، التغيرات الموسمية، الدليل الموسمي.

س٢: ما هي أهمية تحليل السلسلة الزمنية؟

س٣: ما هي عناصر السلسلة الزمنية؟

س٤: كيف يتم التخلص من أثر الاتجاه العام؟

س٥: للسلسلة الزمنية التالية: ٣، ٧، ٦، ١٦، ١٢، ١٤، ١١، ١٠، ٩.

المطلوب: (١) معامل الخشونة.

(٢) سلسلة المعدلات المتحركة بطول (٣).

س٦: الجدول التالي يبين صادرات المملكة خلال السنوات (١٩٨٩-١٩٨٠).

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩
صادرات المملكة بملايين الدينارين	٨١	٩٠	٩٩	٩٨	١٠١	١١٠	١٢٠	١١٩	١٢٥	١٥٠

المطلوب:

(١) رسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

(٢) إيجاد معادلة الاتجاه العام باستخدام:

(أ) طريقة التمهيد باليد

(ب) طريقة نصف السلسلة

(ج) طريقة المتوسطات المتحركة (طول المتوسط يساوي ٣).

(د) طريقة المربعات الصغرى.

(٣) التنبؤ بالقيم الاتجاهية للصاحرات عام ١٩٩٥، ٢٠٠٠ .

(٤) تخلص قيم الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

٧. الجدول التالي بين مبيعات إحدى المتاجر الكبرى الربع السنوية خلال السنوات ١٩٩٥-١٩٩٨ بالآلاف الدنانير.

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨
الفصل				
الشتاء	٣٧	٤٦	٥٢	٥١
الربيع	٢٨	٤٥	٤١	٥٢
الصيف	٣٩	٤١	٤٦	٥٣
الخريف	٣٧	٣٨	٥٠	٥٩

المطلوب:

(١) تقدير معادلة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

(٢) تخلص قيم الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

(٣) حساب الدليل الموسمي.

(٤) تخلص الظاهرة من الأثر الموسمي.

(٥) إيجاد نسب التغيرات الدورية والعرضية.

الإحصاءات الحيوية والسكانية

Demographic and vital statistics

(١-١٠) الإحصاءات الحيوية.

(١-١-١٠) إحصاءات المواليد.

(٢-١-١٠) الخصوبة.

(٣-١-١٠) إحصاءات الوفيات.

(٤-١-١٠) الإحصاءات الصحية.

(٥-١-١٠) إحصاءات التحرك السكاني.

(٦-١-١٠) إحصاءات الزواج والطلاق.

(٧-١-١٠) إحصاءات المرض.

(٨-١٠) مقاييس النمو السكاني.

تمارين الوحدة.

الإحصاءات الحيوية والسكانية

(١-١٠) الإحصاءات الحيوية :

تعريف،

يمكن تعريف الإحصاءات الحيوية بأن مجموع الحوادث والأحداث التي تصيب الإنسان منذ لحظة ولادته حتى وفاته. وبهذا التعريف فإن الإحصاءات الحيوية تشمل:

(١) إحصاءات المواليد

(٢) إحصاءات الوفيات.

(٣) إحصاءات الزواج والطلاق.

(٤) إحصاءات المرض.

(٥) إحصاءات التحرك السكاني.

(٦) الإحصاءات الصحية.

ويتم علة الحصول على البيانات المتعلقة بالإحصاءات الحيوية بموجب قوانين خاصة تنظمها الدولة. وسنأتي بشيء من التفصيل على هذه الإحصاءات.

(١-١٠) إحصاءات المواليد:

يتم الحصول على البيانات المتعلقة بالمواليد من السجل المدني الذي يفرض على المواطنين تسجيل والتبليغ عن كل ولادة جديدة ويتم علة التفريق بين المواليد أحياء والمواليد موتى.

تعريف، المولود الحي هي كل مولود تظهر عليه بعد ولادته أية علامة من علامات الحياة بعد انفصاله عن أمه حتى ولو توفي بعد ذلك فوراً.

تعريف: المولود الميت من ولد ميتاً بعد الشهر السادس من الحمل سواء أحدثت الوفاة قبل الوضع أو أثناءه ولم يظهر على الجنين بعد الانفصال التام أية علامة من علامات الحياة.

ومن أهم إحصاءات المواليد:

$$(١) \text{ معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء في السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$$

وقد سمي هذا المعدل بالمعدل العام أو الخام لأنه لا يأخذ في الاعتبار اختلافات الترتيب السكاني بين المجتمعات.

(١٠-٢) الخصوبة:

ويقصد بالخصوبة القدرة الواقعة للمرأة على الإنجاب وتقلص الخصوبة بعدد الأطفال الذين تنجبهم الأنثى خلال فترة الإنجاب التي تتراوح بين سن ١٥-٤٥ (أو ٤٩) حسب ظروف المجتمع.

ونلاحظ بأن مقياس الخصوبة ربط بالأنثى لأن الأنثى هي التي تحمل الجنين وسن الخصوبة محددة بين سن البلوغ والياس وبالتالي تسهل عملية القياس وهناك عوامل مؤثرة في الخصوبة هي:

(١) الحروب والأمراض والأوبئة وتؤثر هذه على الخصوبة سلبياً وذلك لأسباب منها:

(أ) تأجيل الزيجات بسبب ظروف الحرب.

(ب) انتشار الأوبئة والأمراض.

(ج) سوء التغذية.

(د) غلاء المعيشة.

(هـ) ارتفاع الأجور أثناء الحرب مما يغري الإنث بالعمل والامتناع عن الإنجاب مؤقتاً.

لكن يلاحظ بأن فترة ما بعد الحرب تشهد زيادة في الخصوبة بسبب انتماء الزيجات المؤجلة وكذلك يلاحظ بأن عدد الذكور المواليد أكبر من الإناث لأسباب يعلمها الله سبحانه وتعالى.

(٢) درجة التقدم الحضاري، عادة يصلحها نقص في معدلات الخصوبة بسبب انتشار وسائل التسلية فكلما كان البلد متقدماً حضارياً كلما نقص معدل الخصوبة فيه.

(٣) عوامل اقتصادية واجتماعية، تؤثر سلباً وإيجاباً على الخصوبة.

ومن أهم مقاييس الخصوبة ما يلي:

عدد المواليد أحياء خلال السنة

$$(١) \text{ معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{1000 \times \text{عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة}}$$

عدد المواليد أحياء خلال السنة

$$(٢) \text{ معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{1000 \times \text{عدد النساء المتزوجات والمطلقات}}$$

عدد النساء المتزوجات والمطلقات

والأرامل في سن الحمل في منتصف السنة

عدد مواليد الأمهات في سن معينة

$$(٣) \text{ معدل الخصوبة حسب فئات السن} = \frac{\text{عدد مواليد الأمهات في سن معينة}}{1000 \times \text{عدد الإناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}}$$

عدد الإناث في نفس فئة السن في منتصف السنة

مثال (١):

الجدول التالي يبين توزيع الإناث في سن الحمل حسب فئات السن وعدد المواليد أحياء حسب فئات سن الأم.

فئات السن	عدد الإناث في منتصف السنة	عدد المواليد أحياء
٢٠-١٥	٢٨٦١٥٧٨٠	٨٥٦١٠
٢٥-٢٠	١٧٨٦٥١٦٢	٢٧٩٦٨٥
٣٠-٢٥	٢٥٦٨٦٩٢١	٧٨١٧٦٥
٣٥-٣٠	٢٩٦٨٦١٩٨	٥٣٨٠٧٦
٤٠-٣٥	٢١٤٨٥٠٠٠	٤٢٦٩٧٠
٤٥-٤٠	١٦٦٢٩٤٠٠	١٦٦٣٥٠
٤٥-فأكثر	٢١٨٢٠٠٠٠	٤٩٢٧٠
المجموع	١٧١٧٨٠٠٠٠	٢٣٣٧٣٦

احسب ما يلي:

(١) معدل الخصوبة حسب الفئة العمرية (٢٥-٢٠)

عدد المواليد أحياء لأمهات في الفئة العمرية (٢٥-٢٠)

$$1000 \times \underline{\hspace{2cm}} =$$

عدد الإناث في نفس الفئة

$$1000 \times \frac{279685}{17865162} = 15,00 \text{ لكل ألف.}$$

$$(2) \text{ معدل الخصوبة للفئة العمرية (٤٥ فأكثر)} = 1000 \times \frac{49270}{21820000}$$

$$= 2,26 \text{ لكل ألف.}$$

$$(3) \text{ معدل الخصوبة العام} = 1000 \times \frac{233736}{171780000} = 13,00 \text{ لكل ألف.}$$

(٤) معدل المواليد الخام إذا علمت بأن عدد السكان في منتصف السنة يساوي (٢ مليار)

$$\begin{aligned} & \text{عدد المواليد أحياء خلال السنة} \\ \therefore \text{معدل المواليد الخام} &= \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times \\ &= \frac{333331}{2000000} \times 1000 = 1,66 \text{ لكل ألف.} \end{aligned}$$

(١٠-٣) إحصاءات الوفيات:

هنالك عدة عوامل مؤثرة في الوفيات منها:

(١) الحروب يلاحظ بأن الحروب تسبب زيادة في الوفيات بسبب القتل وسوء التغذية.

(٢) الجنس: نسبة وفيات الذكور أعلى منها في الإناث ويرجع ذلك إلى عوامل بيولوجية لأن المولود الذكر أقل تحملاً لظروف الحياة من الأنثى.

(٣) الأمراض: تزيد من نسبة الوفيات.

(٤) القدم الصحي والحضاري يقلل من نسبة الوفيات.

ومن أهم معدلات الوفيات ما يلي:

عدد الوفيات عدا المواليد موتى

$$(١) \text{ معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

عدد الوفيات الذين لهم صفة خاصة

$$(٢) \text{ معدل الوفيات الخاص} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

ويقصد بالصفة الخاصة الجنس أو الجنسية أو اللون أو فئة السن... إلخ.

مثال (٢):

الجدول التالي يبين فئات السكان وفئات الوفيات في بلد ما.

فترة السن	الحالة الاجتماعية للسكان						الحالة الاجتماعية للمتوفين			
	لم يتزوج مطلقاً		متزوج		مطلق		لم يتزوج مطلقاً		متزوج	
	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر
٢٥-١٨	٧٨١٧٠٠	٢٣٣٦٠٠	٩٨٧٥٠٠	١٨١٢٨٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠٠	٨٢٠٠	١١٣١٠٠	٢٧٠٠٠	٢٠٠٠٠
٣٥-٢٥	٤٥٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠٠	٢٧٠٠٠٠٠	١٨٠٠٠	٢٣٠٠٠	١٨٠٠٠	٢٣٠٠٠	٥٠٠٠٠	٩٠٠٠
٣٥ فأكثر	٣٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠	٥٠٠٠	٢٠٠٠	٥٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٥٠٠٠

احسب معدلات الوفاة الخاصة بفئة السن (٢٥-١٨) والحالة الاجتماعية

للمتزوجين.

الحل:

(١) معدل الوفاة الخاص بفئة السن (٢٥-١٨)

$$1000 \times \frac{1500 + 2000 + 20000 + 27000 + 113100 + 8200}{120000 + 8000 + 1812800 + 987500 + 233600 + 781700} =$$

$$1877 = 1000 \times \frac{71800}{3825100} \text{ لكل ألف.}$$

(١) معدل الوفاة الخاص بالمتزوجين

$$1000 \times \frac{50000 + 100000 + 30000 + 50000 + 2000 + 27000}{2000000 + 1500000 + 1800000 + 2700000 + 1812800 + 987500} =$$

$$2388 = 1000 \times \frac{219000}{9167000} \text{ لكل ألف.}$$

(١-١٠) الإحصاءات الصحية:

تعتبر معدلات الوفيات خير معبر عن المستوى الحضاري لبلد ما فكلما قلت نسب الوفيات هذه كلما كان البلد متقدماً حضارياً وأهم المعدلات التي تدل على مستوى الصحة تلك المعدلات التي لها علاقة بوفيات الأطفال والأمومة وكذلك معدلات الوفيات المتعلقة بوفيات سبب معين... الخ.

عدد الوفيات الناجمة عن سبب معين

أولاً، معدل الوفاة حسب سبب الوفاة = $\frac{\text{عدد الوفيات الناجمة عن سبب معين}}{10000}$

عدد السكان التقديري في منتصف السنة

مثال:

إذا كان عدد الوفيات بسبب مرض الكوليرا يساوي (٢٠٠٠) وعدد السكان التقديري في بلد ما يساوي (٢) مليون احسب معدل الوفاة بسبب مرض الكوليرا.

الحل:

$$\text{معدل الوفاة بسبب مرض الكوليرا} = \frac{2000}{2000000} \times 10000 = 1 \text{ لكل ألف.}$$

ثانياً، المعدلات الخاصة بوفيات الأطفال والأمومة:

ومن أهم هذه المعدلات:

عدد وفيات النساء بسبب الحمل والولادة

(١) معدل وفيات الأمومة = $\frac{\text{عدد وفيات النساء بسبب الحمل والولادة}}{1000}$

عدد المواليد أحياء

عدد وفيات الأطفال الرضع عند المواليد موتى

(٢) معدل وفيات الأطفال الرضع = $\frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع عند المواليد موتى}}{1000}$

عدد المواليد أحياء

(٣) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة (أقل من ٢٨ يوم)

عدد وفيات الأطفال أقل من ٢٨ يوم

= $\frac{\text{عدد وفيات الأطفال أقل من ٢٨ يوم}}{1000}$

عدد المواليد أحياء

(٤) معدل وفيات الطفولة المبكرة

عدد الوفيات من (٢٨ يوم إلى ١١ شهر)

$$= \frac{\text{عدد الوفيات أقل من ٢٨ يوم}}{١٠٠٠ \times \text{عدد المواليد أحياء - عدد الوفيات النساء أثناء الحمل والولادة ٤٢٦٠٠}} \times ١٠٠٠$$

عدد المواليد أحياء - عدد الوفيات أقل من ٢٨ يوم

مثال، إذا كان عدد الوفيات النساء أثناء الحمل والولادة ٤٢٦٠٠ وعدد المواليد أحياء مليون طفل وعدد المواليد موتى = ٣٠٠٠ وعدد وفيات الأطفال الرضع الأقل من سنة يساوي ١٥٠٠٠ منهم ١٠٠٠ أطفال حديثي الولادة.

احسب ما يلي:

$$(١) \text{ معدل وفيات الأمومة} = \frac{٤٢٦٠٠}{١٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ٤٢,٦ \text{ لكل ألف.}$$

$$(٢) \text{ معدل وفيات الأطفال الرضع} = \frac{٣٠٠٠ - ١٥٠٠}{١٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٥ \text{ لكل ألف.}$$

$$(٣) \text{ معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة} = \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١ \text{ لكل ألف.}$$

$$(٤) \text{ معدل وفيات الطفولة المبكرة} = \frac{١٠٠٠ - ١٥٠٠}{١٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٤,٠١ \text{ لكل ألف.}$$

(١٠-١-٥) إحصاءات التحرك السكاني،

يقصد بالتحرك السكاني هو انتقال السكان من منطقة لأخرى سواء داخل البلد أو خارجه وإذا كان داخل البلد سميت هجرة داخلية وإذا كانت خارج البلد سميت هجرة خارجية.

أسباب الهجرة:

(١) العوامل الاقتصادية وهي العوامل الغالبة على الهجرة سواء الداخلية أو الخارجية ويتم الانتقال لتحسين الأوضاع الاقتصادية.

(٢) عوامل سياسية: ويضطر هنا السكان للهجرة بسبب الاضطهاد السياسي أو عمليات الطرد

(٣) طلباً للعلم: ويتم هنا الهجرة على المستوى الفردي.

(٤) التقدم الحضاري: ويتم هنا الانتقال من بلاد أقل حضارة إلى بلاد أكثر تقدم حضاري.

(٥) الكثافة السكانية: ويتم هنا الهجرة العكسية كالهجرة من المدينة إلى الريف أو الهجرة من بلاد أكثر ازدهاراً إلى بلاد أقل ازدهاراً.

(١٠-٦) إحصاءات الزواج والطلاق:

تستخدم البيانات الخاصة بالزواج والطلاق لاستخراج معدلات أهمها:

عدد حالات الزواج خلال السنة

$$(١) \text{ معدل الزواج الخام} = \frac{\text{عدد حالات الزواج خلال السنة}}{١٠٠٠} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

عدد حالات الزواج خلال السنة

$$(٢) \text{ معدل الزواج} = \frac{\text{عدد حالات الزواج خلال السنة}}{١٠٠٠} \times$$

عدد السكان من هم في سن الزواج في منتصف السنة

عدد حالات الطلاق خلال السنة

$$(٣) \text{ معدل الطلاق الخام} = \frac{\text{عدد حالات الطلاق خلال السنة}}{١٠٠٠} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

عدد حالات الطلاق خلال السنة

$$(٤) \text{ معدل الطلاق} = \frac{\text{عدد حالات الطلاق خلال السنة}}{١٠٠٠} \times$$

عدد المتزوجين في منتصف السنة

(١٠-٧) إحصاءات المرض:

من الإحصاءات التي تهتم العاملين في المجال الصحي وتحليل الوضع الصحي في المجتمع هو موضوع إحصاءات المرض وفما يلي بعض المعدلات الخاصة بالإحصاءات المرضية:

عدد الإصابات الجديدة في مرض معين خلال السنة

$$(١) \text{ معدل الإصابة} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

عدد الإصابات الموجودة في لحظة معينة

$$(٢) \text{ معدل الانتشار} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

عدد حالات الوفاة بسبب مرض معين

$$(٣) \text{ نسبة حالات الهلاك} = \frac{\text{عدد حالات الإصابة بهذا المرض}}{1000} \times$$

عدد حالات الإصابة بهذا المرض

مثال (٣):

مجتمع مكون من ١٠٠٠٠ شخص ونتيجة دراسة وجود مرض معين في بداية العام وجد أنه لا توجد بينهم أي إصابات ولكن تم تسجيل ٢٠٠ حالة إصابة خلال الشتاء أو معدل الإصابة بهذا المرض.

الحل:

عدد حالات الإصابات الجديدة خلال السنة

$$\text{معدل الإصابة} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

$$= \frac{200}{10000} \times 1000 = 20 \text{ لكل ألف.}$$

(١٠-٢) تعداد السكان:

هو عملية حصر الأفراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع بيانات محددة تبين الصفات الأساسية للأفراد الذي تتألف منهم مجتمع معين ومن أهم البيانات التي يتم جمعها في التعداد ما يلي:

(١) بيانات عن خصائص الأفراد مثل العمر، الجنس، الديانة، الجنسية، الميلاد
الوضع الاجتماعي، الحالة التعليمية، المهنة.
(٢) بيانات تكوين الأسرة مثل عدد الأفراد وعلاقة أفراد الأسرة بالسكن وحالة السكن.

(٣) بيانات عن الخصوبة.

أهداف التعداد السكاني:

(١) توفر بيانات التي تفيد في حل المشاكل السكانية وبذلك يتم من خلالها تقدير احتياجات البلد من خدمات صحية وتعليمية وإسكانية.
(٢) توفير خدمات للدراسات أكثر تعمقاً.
(٣) تساهم في التنمية الاقتصادية للبلد من خلال معرفة التوزيع السكاني.

(١٠-٣) مقاييس النمو السكاني:

(١) الزيادة الطبيعية للسكان وهي الفرق بين عدد المواليد وعدد الوفيات وبالتالي فإن معدل الزيادة السكانية

$$= \frac{\text{عدد المواليد أحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$$

(٢) صافي الهجرة = عدد المهاجرين إلى البلد - عدد المهاجرين من البلد

$$\text{صافي الهجرة} = \frac{\text{صافي الهجرة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$$

(٣) التغير في عدد السكان (الزيادة السكانية) = الزيادة الطبيعية + صافي الهجرة

الزيادة السكانية

$$\text{معدل النمو السكاني (معدل الزيادة السكانية)} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف العام}}{1000} \times$$

مثال (٤):

إذا كان عدد سكان قطر ما في منتصف عام ١٩٩٤ يساوي (٩) مليون وعدد المواليد أحياء (٥٦) ألف وعدد الوفيات تساوي (٧) آلاف وعدد المهاجرين إلى البلد يساوي (٣١٠) ألف وعدد المهاجرين منه يساوي (٢٤٠).

المطلوب: (١) معدل الزيادة الطبيعية.

(٢) معدل الهجرة.

(٣) معدل النمو السكاني.

الحل:

(١) الزيادة الطبيعية = عدد المواليد أحياء - عدد الوفيات

$$49000 = 7000 - 56000 =$$

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{49000}{900000} \times 1000 = 0,44 \text{ لكل ألف.}$$

عدد المهاجرين إليه - عدد المهاجرين منه

$$(2) \text{ معدل الهجرة} = \frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times$$

عدد السكان في منتصف السنة

$$1000 \times \frac{240000 - 310000}{900000} =$$

$$= \frac{120000}{900000} \times 1000 = 13,33 \text{ لكل ألف.}$$

(٣) معدل النمو السكاني = معدل الزيادة الطبيعية + معدل الهجرة.

$$= 13,33 + 0,44 =$$

$$13,77 \text{ لكل ألف.}$$

معدل النمو السكاني:

هنالك عدة طرق لحساب معدل النمو السكاني منها:

(١) نظام المتوالية العددية

(٢) نظام المتوالية الهندسية.

وستقوم بشرح نظام المتوالية العددية.

نظام المتوالية العددية:

لنفترض بأن عدد السكان يتغير (يتزايد أو يتناقص) بمقدار عددي ثابت من سنة لأخرى خلال الفترة الزمنية الفاصلة بين تعدادين وبذلك يتم حساب معدل النمو حسب نظام المتوالية العددية كالتالي:

$$r = \frac{k_1 - k}{k \times t}$$

حيث ر: معدل النمو السكاني السنوي.

ك: عدد السكان في التعداد الأول.

ك_١: عدد السكان في التعداد التالي.

ن: طول الفترة الزمنية الفاصلة بين التعدادين.

مثال (٥):

إذا كان سكان الأردن عام ١٩٩٤ يساوي (٤) مليون وأصبح عدد سكانه عام (٢٠٠٠) يساوي (٥) استخرج معدل النمو السكاني في الأردن.

الحل:

$$\text{معدل النمو السكاني} = r = \frac{k_1 - k}{k \times t}$$

حيث ك_١ = ٥ مليون.

ك = ٤ مليون.

ت = ٦ مليون.

$$\therefore r = \frac{1}{24} = \frac{4-5}{6 \times 4} = 0,041$$

مثال (٦):

إذا كان معدل النمو السكاني للأردن يساوي (٢,٥) بالمائة وأن عددهم عام ١٩٩٠ يساوي ٣,٦ مليون أوجد.

(١) عدد السكان التقديري عام ١٩٩٧.

(٢) عدد السكان التقديري عام ٢٠٠٢.

الحل:

حسب معادلة النمو السكاني فإن:

$$r = \frac{k - k_0}{k_0 \times t}$$

$$\Leftrightarrow k = k_0 + r \times k_0 \times t$$

عدد السكان التقديري في أي عام = $k = (1 + r \times t) \times k_0$

(١) عام ١٩٩٧ وتكون الفترة الزمنية الفاصلة $t = ٧$ ، $k_0 = ٣,٦$ ، $r = ٠,٠٢٥$.

وبالتالي فإن:

$$\text{عدد السكان التقديري عام ١٩٩٧} = k = (1 + ٠,٠٢٥ \times ٧) \times ٣,٦$$

$$= ٤,٣٣ \text{ مليون}$$

(٢) الفترة الزمنية الفاصلة بين (١٩٩٠، ٢٠٠٢) تساوي $t = ١٢$.

$$\therefore \text{عدد السكان التقديري} = (1 + ٠,٠٢٥ \times ١٢) \times ٣,٦$$

$$= ٤,٦٨ \text{ مليون}$$

ونلاحظ بأن هنالك عدة عوامل تؤثر في الزيادة الطبيعية منها:

(١) التقدم الحضاري يصاحبه تقدم صحي وبالتالي يقلل من عدد الوفيات وكذلك

تطوير وسائل منع الحمل يقلل من عدد المواليد وهذا يعني بأن التقدم الحضاري

يؤثر سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية.

- (٢) الموقع الجغرافي: يؤثر الموقع الجغرافي سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية حيث أنه في البلاد الحارة يكون سن البلوغ مبكراً في الباردة يتأخر سن البلوغ.
- (٣) الحروب تقلل من عدد المواليد وتزيد عدد الوفيات.
- (٤) الفئات العمرية حيث في البلاد الفتية يكون عدد الوفيات قليل يعكس المجتمعات المتقدمة في السن.
- (٥) العوامل الاجتماعية والاقتصادية: هنالك معتقدات وعادات في المجتمع تؤثر سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية وكذلك الوضع الاقتصادي.

تمارين الوحدة العاشرة

س١، عرف المفاهيم التالية:

الإحصاء الحيوي، تعداد السكان، الخصوبة، التحرك السكاني، المولود حي، المولود ميت.

س٢، وضع كيف تؤثر كل مما يلي على الوفيات:

(١) العوامل البيولوجية.

(٢) التخلف الصحي.

(٣) التقدم الحضاري.

(٤) فئة السن.

س٣، إذا كان عدد المواليد أحياء (٢٥٠) ألف وعدد السكان في منتصف العام يساوي

(٣) مليون احسب معدل المواليد العام.

س٤، إذا كان:

عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة يساوي (٤٢٨٥٠).

عدد السكان في منتصف العام يساوي (٩) مليون.

عدد المواليد أحياء (٢٥٠) ألف.

عدد حالات الزواج (٣٧٠) ألف.

عدد حالات الطلاق (٤٥) ألف.

عدد المواليد موتى (١١٥٠٠).

عدد الوفيات للأطفال الرضع الأقل من سنة (٦٠٠٠) منهم ٣٥٠ حديثي الولادة.

المطلوب:

(١) معدل وفيات الأمومة.

(٢) معدل الزواج الخام.

(٣) معدل الطلاق الخام.

(٤) معدل وفيات الأطفال الرضع.

(٥) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة.

س٥، الجدول التالي يبين إحصائية بأعداد النساء وأعداد المواليد أحياء مصنفة حسب أعمار النساء.

الفئة العمرية للنساء	عدد النساء	عدد المواليد أحياء
٢٠-١٥	٣٣٥٢٠٠	٣٣٨١٥
٢٥-٢٠	٣٨٩٦٠٠	٥٣٨٧٠
٣٠-٢٥	٢٨٣٤٠٠	٢١٦٧٠
٣٥-٣٠	٨٤٢٣٠٠	٩٨٣٥
٤٥-٣٥	٢١٨٠٥٠	٥٨٧٠
٤٥- فأكثر	٢٥٨٧٦٠	٢١٨٠

المطلوب: (١) معدل الخصوبة حسب الفئة العمرية.

(٢) معدل الخصومة العام.

س٦، الجدول التالي يبين عدد السكان حسب الجنس والجنسية والمتوفين في قطر ما.

الجنسية	الجنس		عدد السكان بالملايين		عدد المتوفين بالآلاف	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث	ذكور	إناث
أردني	٢,٣	٢,٤	٣٣	٢٢		
مصري	٤٦	٤٧	٩٦٧	٨٨٦		
سوري	١١,٣	١١,٤	٢٥٣	٢٤٨		
جنسيات أخرى	٢٥٨,٧	٢٥٩	١٨٥٠	١٨٢٥		

احسب جميع معدلات الوفاة الخاصة الممكن حسابها.

س٧، إذا كان عدد حالات الإصابات الجلدية بمرض الإيدز في الولايات المتحدة

تساوي (١,٧) مليون وعدد سكان الولايات المتحدة تساوي (٢٨٩) مليون
احسب معدل الإصابة بمرض الإيدز ثم احسب معدل أو نسبة حالات الهلاك
بسبب الإيدز إذا علمت بأن عدد الوفيات بسبب هذا المرض تساوي (٧٦)
ألف.

س٨، إذا كان عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٩٩ يساوي (٢٨٩) مليون
نسمة وأصبح عدد سكانها عام (٢٠٠١) يساوي (٢٩٥) مليون احسب معدل
النمو السكاني للولايات المتحدة.

س٩، إذا كان عدد سكان قطر ما عام ١٩٨٠ يساوي (١٣٠) مليون وكان معدل النمو
السكاني لهذا القطر يساوي (٠,٣).

المطلوب:

(١) عدد السكان التقديري لهذا القطر عام ١٩٩٠.

(٢) عدد السكان التقديري لهذا القطر عام ٢٠٠٠.

أسئلة عامة

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

(١) العينة هي:

أ- المشاهدات المقاسة على أفراد المجتمع الإحصائي.

ب- مقاييس إحصائية غير متصلة.

ج- مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي

د- سبب من أسباب المسح الشامل

(٢) عدد الأطباء المسجلين في النقابة (٢٥٠٠٠) طبيب و (١٥٠٠٠) طبيبة أردت اختيار عينة

عدها (٤٠٠) طبيب وطبيبة بالطريقة الأنسب لاختيار هذه العينة على أسس

نقابي هي العينة:

أ- العشوائية

ب- المنتظمة

ج- العنقودية

د- الطبقة

(٣) أن البديل المناسب لطريقة العينة الطبقة عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع

الإحصائي هي العينة:

أ- الغرضية

ب- العنقودية

ج- العشوائية البسيطة

د- لا شيء مما ذكر

(٤) نوع المتغير "عدد الأطفال في أسرة" هو:

أ- متصل فئوي

ب- متصل ترتيبي

ج- منفصل نسبي

د- منفصل اسمي

(٥) مستوى القياس الذي تعطي فيه الأرقام لأغراض التمييز فقط هو المستوى:

أ- الاسمي

ب- الترتيبي

ج- الفئوي

د- النسبي

(٦) إذا أنشأ توزيعاً تكرارياً فإن التكرارات يجب أن يساوي

أ- مجموع، طول الفئة

ب- عدد، المدى

ج- مجموع، عدد البيانات (ن)

د- مجموع، عدد الفئات

٧) يمكننا الحكم على مدى تمثيل عينة ما للمجتمع المخوفة فيه من خلال:

أ- تجانس أفراد عينة الدراسة.

ب- تمثيل العينة بنسبة تزيد عن ١٠٪.

ج- بعد أو قرب العينة عن متوسط مجتمعها مقدراً بوحداث الانحراف المعياري.

د- العينة المنتظمة .

٨) عند اختيار عينة الدراسة يؤخذ بعين الاعتبار:

أ- انتقاء أفراد عينة الدراسة بدقة وعناية.

ب- مبدأ تكافؤ الفرص لجميع أفراد العينة.

ج- اختيار الأفراد المناسبين.

د- إسقاط بعض أفراد العينة.

٩) أفضل نسبة في اختيار عينة الدراسة من مجتمع كبير كما اجمع عليه الإحصائيون هي:

أ- ٢٪ ب- ٤٪ ج- ٥٪ د- ١٠٪

١٠) يشترط في حالة اللجوء إلى الاختيار العشوائي للعينة أن يكون مجتمعها:

أ- طبقياً ب- محدداً ج- كبيراً د- متجانساً

١١) عُرِضت أعداد الطلبة في الصفوف الثانوية التجاري والصناعي في مدرسة ثانوية

بطريقة الدائرة. إذا كان عدد طلاب المدرسة يساوي (٦٠٠) طالب وعدد طلاب

الصف الأول الصناعي يساوي (٥٠) طالب فإن قياس زاوية قطاع هذا الصف

يساوي:

أ- ١٢٠° ب- ١٢° ج- ٣٠° د- ٦٠°

١٢) العلاقة بين تكرار أي فئة (ت) ونسبة عدد الأفراد (ك) في تلك الفئة هي:

أ- $ك = \frac{ت}{ن}$ ب- $ن = ك \times ت$

ج- $ت = ن \times ك$ د- غير ذلك

١٣) التوزيع التكراري الذي فيه تكرارات النقاط المتساوية البعد عن الفئة المركزية

متساوية يمكن أن يكون:

أ- مستطيلاً ب- له قمتين ج- يشبه شكل الجرس د- أي واحدة ما ذكر

١٤) الخواص التي تميز بها شكل التوزيع:

- أ- التماثل أو عدمه
- ب- عند القمم
- ج- التفرطح
- د- جميع ما ذكر

١٥) تمثل التكرارات في المدرج التكراري للتوزيع التكراري في الفئات المتساوية (وغير المتساوية).

- أ- مساحات المستطيلات
- ب- ارتفاعات المستطيلات
- ج- عروض المستطيلات
- د- لا شيء ما ذكر

١٦) يضيف الموظف المختص الوفيات في مستشفى في توزيع تكراري فئاته بالسنوات

١٠-١١ ، ٢٠-٢١ ، ٣٠-٣١ ، ٤٠-٤١ ، ٥٠-٥١ ، ٦٠-٦١ ، ٧٠-٨٠

أ- الفئات أعلاه تصلح لعرض الوفيات في جدول تكراري.

ب- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها متداخلة.

ج- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها الفئة الأولى أطول من غيرها.

د- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها غير كافية حيث أنها لا تستوعب الوفيات من عمر أكبر من ٧٠ سنة.

١٧) يبنى وصف التوزيع التكراري على ثلاث صفات هي:

أ- الحجم، الشكل، النزعة المركزية.

ب- الحجم، النزعة المركزية، التشتت.

ج- الشكل، النزعة المركزية، التشتت.

د- الحجم، الشكل، عدد البيانات.

١٨) أن عملية تصنيف البيانات يجب أن يعتمد على نظام يتم بموجبه تصنيف البيانات

وحتى يكون النظام المعتمد في عملية التصنيف نظام ناجح يجب أن يتمتع بخواص.

أ- عدم التداخل والشمول.

ب- الاستمرارية في تطبيق النظام المستخدم.

ج- مجموع التكرارات يجب أن يساوي عدد البيانات

د- أ + ج

١٩) التوزيع التكراري المتناسب للبيانات (٨، ٦، ١٠، ٩، ٨، ٨، ٩، ١٠، ١٠، ١٠)

أ	ب	ج	د
ت	س	ت	س
١	٦	١	٠
٣	٧	٠	١
٢	٨	٣	٢
٤	٩	٢	٣
١٠	١٠	٤	٤

د- لا شيء مما ذكر

٢٠) أخلت الفئة (٣٠-٣٧) من جدول تكراري فإن طول هذه الفئة يساوي:

أ- ٧ ب- ٦ ج- ٨ د- ٣,٥

اعتمد على الجدول التالي في الإجابة عن الأسئلة التي تليه (٢١-٢٥).

الفئات	ت	\geq حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٤٧-٣٠	٣٧	٤٧,٥	٣٧
٦٥-٤٨	س	٦٥,٥	
٨٣-٦٦	٢٠	ص	
١٠١-٨٤	٧	١٠١,٥	٨٠
المجموع			

٢١) التكرار النسبي للفئة (٦٦-٨٣) يساوي:

أ- ٠,٥ ب- ٠,٢ ج- ٠,٢٥ د- غير ذلك

٢٢) قيمة س تساوي

أ- ٢٠ ب- ٣٦ ج- ٣٧ د- لا يمكن إيجادها

٢٣) قيمة ص تساوي

أ- ٦٥,٥ ب- ٨٣,٥ ج- ٨٤,٥ د- ٨٣

٢٤) التكرار التراكمي المقابل للحد الفعلي ٨٣,٥ يساوي

أ- ٢٠ ب- ٤٧ ج- ٨٠ د- ٧٣

٢٥) النسبة المئوية للتكرارات التي تقل عن أو تساوي ٦٥ هي:

أ - 266,25 ب - 233,75 ج - 291,25 د - 27,75

٢٦) إذا كان لدينا فئة مركزها (٣٦) وطول هذه الفئة يساوي (٩) فإن الحدود الفعلية لهذه الفئة هي:

أ) ٣٠، ٢١، ٥ ب) ٣٠، ٢١، ٥ ج) ٣٠، ٢٢ د) ٣٥، ١٧

٢٧) إذا كان لدينا ثلاثة مصانع هي أ، ب، ج وكان الحجم الكلي للإنتاج يساوي (١٢٠٠٠) وحصة ومثل الإنتاج بطريقة الدائرة فكانت زاوية قطاع المصنع ج تساوي (٩٧٢) فإن حجم إنتاج المصنع يساوي:

أ) ٢٠٠٠ ب) ٢٤٠٠ ج) ٩٦٠٠ د) لا يمكن إيجابه بالعلوم المتوفرة

٢٨) أي مقياس مما يأتي ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

أ) المدى ب) النوال ج) الوسيط د) المئين السبعون.

٢٩) المقياس الذي يقسم المساحة تحت المدرج التكراري لتوزيع ملئ إلى قسمين متساويين هو:

أ) النوال ب) الوسط الحسابي ج) الوسيط د) الانحراف المعياري.

٣٠) مقياس النزعة المركزية الذي يعتمد فقط على عدد البيانات التي قيمها أقل من قيمته وعدد البيانات التي قيمتها أكبر من قيمته هو:

أ) الوسط الحسابي ب) الوسيط ج) النوال د) المدى.

٣١) يجب أن يكون الوسط الحسابي:

أ) إحدى قيم البيانات المعطاة.

ب) نقطة على محور القيم ولكن ليس من الضروري أن يساوي قيمة من قيم البيانات المعطاة.

ج) مسافة على محور القيم توجد بين قيمتين من قيم البيانات المعطاة.

د) مسافة على محور القيم ولكن ليس من الضروري أن تكون بين قيمتين من القيم المعطاة.

٣٢) مجموعة من البيانات كان $\sum_{i=1}^{20} \text{سر} = 300$ فإن قيمة $\sum_{i=1}^{20} (\text{سر} - 15)$

أ) 15 ب) صفر ج) 45 د) 225

٣٣) إذا كان $\sum_{i=1}^7 \text{سر} = 70$ ، $\sum_{i=1}^9 \text{سر} = 45$ دجت مجموعة البيانات سر مع مجموعة البيانات

ص. فأصبح الوسط الحسابي:

(أ) ٧,٥ (ب) ٧ (ج) ١٥ (د) ١٠,٥

(٣٤) أكثر مقاييس النزعة المركزية استعمالاً هو:

(أ) الوسيط (ب) المنوال (ج) الثنائيات (د) الوسط الحسابي

(٣٥) إذا كانت المحرافات (٥) قيم عن وسطها الحسابي هو ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، فإن قيمة أ تساوي:

(أ) صفر (ب) ٦ (ج) $\frac{14}{3}$ (د) $\frac{14}{3} - ٥$

(٣٦) لحساب الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالب في مبحث ما اختير العدد

(٥٢) كوسط فرضي فإذا علمت بأن مجموع المحرافات علامات هؤلاء الطلبة عن

الوسط الفرضي يساوي (٣٠٠) فإن الوسط الحسابي يساوي:

(أ) ٤٢ (ب) ٥٥ (ج) ٥٢ (د) ٦٢

(٣٧) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٤٠) طالب هو (١٥) والوسط الحسابي لعلامات

(٢٠) طالبه هو (٤٥) فإن الوسط الحسابي المرجح يساوي:

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (ج) ٢٢,٥ (د) ٣٠

(٣٨) إذا كان المئين الستون يساوي (١٢٠) فإن المئين الثلاثون يساوي:

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ٣٦ (د) لا يمكن تحديده

(٣٩) مجموعة من الأرقام مكونة من أربع أربعيات وخمس خمسيات وست ستات وسبع

سبعات فإن المنوال يساوي:

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

(٤٠) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالباً في مادة الإحصاء يساوي (٦٠) وعدلت

هذه العلامات وفق المعادلة التالية: ص = $٨٠ - \frac{1}{4}$ س ، حيث س: العلامة قبل

التعديل، ص: العلامة بعد التعديل فإن الوسط الحسابي بعد التعديل يساوي:

(أ) ١٥ - (ب) ١٥ (ج) ٦٥ (د) ٧٢,٥

استعمل البيانات (٥، ٧، ٨، ٨، ٨، ١٠، ١٣) لإجابة عن الأسئلة من (٤١-٤٣)

(٤١) تغيرت علامتان من القيمة ٨ وحلته إلى ٧ والثانية إلى ٩ فتغير الوسيط:

(أ) من ٨ إلى ٧ (ح) من ٨,٥ إلى ٨

(ب) من ٩ إلى ٧ (د) من ٨ إلى ٧,٥

(٤٢) تغيرت القيمة ٥ فأصبحت ٨ فتغير الوسط الحسابي (مقرباً لأقرب منزلة عشرية)

(أ) من ٨ إلى ٨,٢ (ب) من ٨,٢ إلى ٨,٥ (ح) من ٨ إلى ٨,٣ (د) من ٨,٣ إلى ٨,٤

(٤٣) تغيرت القيمة ١٠ إلى ٨ فتغير المتوسط:

(أ) من ٨ إلى ٧ (ب) ١٣ إلى ١٣ (ح) من ١٠ إلى ١٣ (د) لم يتغير المتوسط

(٤٤) إذا كان $\bar{x} = ٤٠$ فإن $\sum_{i=1}^n x_i$ يساوي:

(أ) ٢ (ب) ٨٠٠ (ج) ٤٠٠ (د) لا يمكن إيجاده بالبيانات المتوفرة

$$(٤٥) \text{ إذا كان } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = ٤٠, \text{ فإن } \sum_{i=1}^n x_i = ٦٢$$

حيث \bar{x} هي المخارج مركز الفئة عن الوسط الفرضي فإن الوسط الفرضي يساوي:

(أ) ١٠٢ (ب) ٢٢- (ج) ٢٢ (د) لا يمكن إيجاده بالبيانات المتوفرة

(٤٦) إذا علمت بأن $\bar{x} = ٣$ من $١٠+$ ، $\bar{x} = 70$ فإن قيمة \bar{x} تساوي:

(أ) ٢٢٠ (ب) ٦٠ (ج) ٢٠ (د) $\frac{٧٠}{٣}$

(٤٧) إذا كان $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + ٥)}{n} = ٤٠٠$ وكان $\bar{x} = ١٥$ فإن قيمة \bar{x} تساوي:

(أ) ٢٥ (ب) ٤٠ (ج) ٢٠ (د) ١٠

(٤٨) للبيانات ٥، ٣، ٧، ١١، فإن $\sum_{i=1}^n x_i$ بينما $\sum_{i=1}^n x_i^2$ يساوي:

(أ) ٦٧١ : ٣٦ (ب) ٦٧١ : ٢٠٤٤ (ج) ٦٧١ : ٢٠٤ (د) ٢٠٤٤ : ٣٦

*** إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي ٨٠ والانحراف المعياري يساوي ٨

ونصف المدى الربيعي يساوي (١٠) والمئين ٣٠ يساوي ٣٠ فاعتمد على هذه

المعلومات في الإجابة عن الأسئلة من (٤٩-٥٠).

(٤٩) قيمة المئين ٧٥ يساوي:

(أ) ١٠ (ب) ٤٠ (ج) ٥٠ (د) ١٠-

٥٠) إذا عدّلت القيم وفق المعادلة $ص = ١,٥س - ٣٠$ فإن قيمة الانحراف المعياري للقياس بعد التعديل يساوي:

- (أ) ١٢ (ب) ١٨- (ج) ١٨ (د) ٨

٥١) الانحراف المعياري للملاحظات (٣,٢,١) يساوي

(أ) $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\sqrt{٢}$ (د) ٢

٥٢) واحدة من الآتية ليس مقياساً للتشتت.

- (أ) المدى. (ب) الانحراف المتوسط. (ج) المدى المثني. (د) الوسيط.

٥٣) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من الملاحظات يساوي (٣) وعدّلت هذه الملاحظات وفق المعادلة التالية: $ص = ٢س + ٨$ حيث $ص$ المشاهدة بعد التعديل، $س$ المشاهدة قبل التعديل فإن التباين بعد التعديل يساوي .

- (أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٤ (د) ٣٦

٥٤) إذا كان التباين (σ^2) لتوزيع تكراري يساوي (٩) وكان $\sum_{i=1}^n س_i \times ت_i = ٤٠٠$ فإن

$$\sum_{i=1}^n س_i^2 \times ت_i$$

- (أ) ٣٦٠٠ (ب) ٤٠٠٠ (ج) ٨٢٠٠ (د) ٨١٨٠

٥٥) الانحراف المتوسط للملاحظات (٧,٩,٥,٣) هو:

- (أ) ٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (ج) ٢ (د) $\sqrt{٢}$

٥٦) إذا كان الوسيط لتوزيع أحلي المتوال يساوي (٢٠) والوسط يساوي (٢٩) فإن المتوال يساوي:

- (أ) ٢٠ (ب) ٢ (ج) ٢٦ (د) ٢-

٥٧) التباين للملاحظات (٣, ٣, ٣, ٣, ٣, ٣, ٣) يساوي:

- (أ) ٣ (ب) ٩ (ج) صفر (د) $\sqrt{٣}$

٥٨) إذا كان العزم الرابع حول الوسط الحسابي لمجموعة من الملاحظات يساوي (٢٤) والانحراف المعياري يساوي (٣) فإن معامل التفرطح العزومي يساوي:

- (أ) ٢,٢٧ (ب) ٠,٢٩٦ (ج) ٧,١١ (د) ٠,٨٨

٥٩) إذا كان العزم الثالث حول الوسط الحسابي لجدول تكراري يساوي (-٣٦) والعزم

الثاني يساوي (٩٢) فإن معمل الالتواء العزومي يساوي:

أ) -٣,٩١ (ب) ١,٢٩ (ج) -١,٢٩ (د) -٠,٤٦

٦٠) العزم الأول للمشاهدات 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6 حول الصفر يساوي:

أ) صفر (ب) ٦ (ج) ٤٠ (د) ٢٨

*** تقدم (١٠٠٠) طالب لامتحان علم وكان الوسط الحسابي للامتحان

(٦٠) والانحراف المعياري (٦) فإذا كانت علامة النجاح (٥٧) وكانت علامات

الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي.

اعتمد على هذه البيانات في الإجابة عن الأسئلة (٦١-٦٢)

٦١) النسبة المئوية للنجاح في الامتحان تساوي:

أ) ١٩,١٥% (ب) ٣٠,٨٥% (ج) ٨٠,٨٥% (د) ٦٩,١٥%

٦٢) عدد الطلاب الذين تنحصر علاماتهم بين ٥١, ٧٢ يساوي:

أ) ٩١٠ (ب) ٩١١ (ج) ٩٧٧ (د) ٩٠

٦٣) تقدم (١٠٠٠) طالب لفحص عام وكان الوسط الحسابي لعلامتهم (٥٠) والانحراف

المعياري (٨) فإذا كان توزيع علاماتهم يتبع التوزيع الطبيعي وكانت علامة النجاح

في الفحص تساوي (٥٨) فإن العدد التقريبي للطلبة الراسبين يساوي:

أ) ٥١٠ (ب) ٨٤١ (ج) ٧٢٠ (د) ٢٨٠

٦٤) إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع ما (١٠٠) والانحراف المعياري له ١٠ فإن العلامة

المعياري التي تقابل ٩٠ هي:

أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (ج) ١ (د) ١ -

٦٥) إذا كانت المساحة تحت المنحنى الطبيعي والواقعة على يسار العلامة المعياري

٢ - هي ٠,٢٢٨ وكان توزيع المتغير س يتبع التوزيع الطبيعي فإن نسبة الحالات

التي تقع بين الوسط الحسابي للمتغير س والعلاقة المعياري ٢ هي:

أ) ٠,٢٢٨ (ب) ٠,٩٧٧٢ (ج) ٠,٤٧٧٢ (د) ٠,٤٥٦

٦٦) تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان علم فكان الوسط الحسابي لعلامتهم (٥٨)

والانحراف المعياري يساوي (٨) وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن قيمة

المتغير تساوي:

أ) ٢٥ (ب) ٥٨ (ج) ٦٠ (د) ٦٣,٣٦

٦٧) تقدم (١٠٠) طالب لامتحان عام فكلان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٠) والانحراف المعياري (١٠) وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن الرتبة المئينية للعلامة (٤٥) تساوي:

(أ) ٤٣,٣٢ (ب) ٦,٦٨ (ج) ٩٣,٣٢ (د) ٥٦,٦٨

٦٨) إذا كان Y متغير عشوائي طبيعياً معيارياً بحيث أن المساحة بين العديدين $-Y$ و Y تساوي ٠,٣٨٣٠ فإن قيمة Y تساوي:

(أ) ١ (ب) ٠,٥ (ج) -٠,٥ (د) -١

٦٩) إذا كان $ص$ متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً بحيث المساحة فوق $ص$ تساوي (٠,٩٣٣٢) فإن قيمة $ص$ تساوي:

(أ) ١,٥ (ب) -١,٥ (ج) ١ (د) -١

٧٠) إذا كانت العلامة المعيارية لطالب في صف ما هي (٠,٥) وعكس المعلم العلامات الخام حسب المعادلة $ص = ٨٠ - \frac{1}{٤} س$, حيث $س$ العلامة قبل التعديل, $ص$

العلامة بعد التعديل فإن العلامة المعيارية لذلك الطالب بعد التعديل تساوي:

(أ) ٠,٥ (ب) -٠,٥ (ج) ١,٢٥ (د) -١,٢٥

٧١) تقدم (٥٠٠) طالب لامتحان ما كان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٥) والانحراف المعياري (٩) وكان توزيع علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن العلامة المعيارية التي تقابل الوسيط هي:

(أ) -١ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٠,٥

٧٢) إذا كان المتوال لتوزيع طبيعي (٧٥) والانحراف المعياري لهذا التوزيع (١٢) فإن الوسط الحسابي يساوي:

(أ) ١٦ (ب) $\frac{11}{٧٠}$ (ج) $\frac{٧٠}{16}$ (د) ٧٥

٧٣) إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي هو $ق(س) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{س-٣}{٣}\right)^2}$

فإن الوسط الحسابي لهذا التوزيع يساوي:

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ١٠ (د) ١٨

(٧٤) الأعداد ٢، ٣، ٥ - لا تمثل علامات معيارية لعينة حجمها ٤ وذلك بسبب:

- (أ) وسطها الحسابي لا يساوي الصفر. (ب) ليست جميعها سالبة.
(ج) تباينها لا يساوي ١. (د) ليست جميعها موجبة.

(٧٥) في التوزيع الطبيعي المعياري يكون.

- (١) الوسط الحسابي (م) والانحراف المعياري (١).
(٢) الوسط الحسابي (صفر) والانحراف المعياري (١).

(ب) الوسط الحسابي (صفر) والانحراف المعياري (σ).
(د) الوسط الحسابي (١) والانحراف المعياري (صفر).

٧٦ ما علامة طالب تنحرف علامته بمقدار (٣) انحرافات معيارية دون الوسط الحسابي الذي قيمته (٣٠) وعدد الطلاب (٢٠) والانحراف المعياري (٤)

(W) إذا كانت W لها القيمة المعيارية $Z = -0,5$ فهذا يكافئ

- (ا) س - $\overline{\text{س}}$ - ۰,۵ -
(ب) س - $\overline{\text{س}}$ - ۰,۵ - σ
(ج) س - صفر - ۰,۵ -
(د) س - ۰,۵ - z

(٧٨) القيم المعيارية تمثل قيمة:

- (أ) بدلالة الوحدات الأصلية مثل المتر، كغم الخ
(ب) بدلالة الانحرافات عن القيم الأصلية
(ج) بدون وحدات.
(د) بدلالة الانحراف المعياري.

(٧٩) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل معامل ارتباط عكسي بين متغيرين .

- ١,٦- ٢ ١,٩ ٢ ١,٢- ٢ ١,٣ ٢

٨٠) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين (ص، ص) يساوي $\frac{1}{4}$ وعرف المتغيرين

مس* = ٢ مس + ٥ ص* = $\frac{1}{6}$ ص - ٦ فإن معامل الارتباط بين المتغيرين

(س، ص) یسوی:

- $$\frac{1}{0} - (a) \quad \frac{1}{0} - (b) \quad \frac{1}{0} - (c) \quad \frac{1}{0} - (d)$$

(٨١) إذا كان كل قيمة من قيم S تساوي (٤) وكل قيمة من قيم S تساوي (٨)

حيث $r = 0.92$ فإن معامل الارتباط بين الرتب للمتغيرين (س، ص) يساوي:

- (٢) - ١ (ب) ١ (ح) صفر (د) غير ذلك

٨٢) لحساب معامل الارتباط بين أطوال وأوزان (١٠) أشخاص وجد أن $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$.

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 40$ حيث x_i الفرق بين الرتب المتناظرة فإن معامل الارتباط سبيرمان يساوي:

$$(أ) \frac{8}{33} \quad (ب) \frac{4}{33} \quad (ج) \frac{20}{33} \quad (د) \frac{29}{33}$$

٨٣) لحساب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) وجد أن $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$ ، $\sum_{i=1}^{10} y_i = 15$ ،

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 49$$

فإن معامل الارتباط بيرسون يساوي:

$$(أ) \frac{1}{24} \quad (ب) \frac{1}{6} \quad (ج) \frac{5}{6} \quad (د) \frac{1}{4}$$

٨٤) إذا كان r يمثل معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فإذا ضربت قيم كل من

س، ص في (٣-) ثم أضيف إلى كل ناتج العدد (٤) فإن معامل الارتباط للقيم

الناتجة يساوي:

$$(أ) r \quad (ب) -r+3 \quad (ج) -r+3 \quad (د) 3r$$

٨٥) س، ص متغيران عشوائيان يأخذ كل منهما (١٢) قيمة فإذا كان مجموع مربعات

الفرق بين رتب هذه القيم (٦٠) فإن قيمة معامل الارتباط سبيرمان يساوي:

$$(أ) \frac{113}{143} \quad (ب) -\frac{113}{143} \quad (ج) \frac{30}{143} \quad (د) -\frac{30}{143}$$

٨٦) حسب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فكان $r = 0.7$ ، فإن طبيعة الارتباط بين

س، ص.

(أ) ارتباط تام (ب) لا يوجد ارتباط (ج) ارتباط طردي (د) ارتباط عكسي

٨٧) حسب معامل الارتباط بين قيم المتغيرين (س، ص) بطريقة سبيرمان فكان (٠,٥)

وكان عدد الأزواج المرتبة (س، ص) يساوي (١٠) فإن مجموع مربعات الفروق بين

الرتب المتناظرة يساوي:

$$(أ) 5 \quad (ب) 20 \quad (ج) 82,5 \quad (د) 92,5$$

٨٨) حسب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فكان (٠,٦) وحسب الانحراف

المعياري للمتغير س فكان (١٦) والانحراف المعياري للمتغير ص فكان (١٠) فإن

ميل معادلة خط الانحدار ص على س يساوي:

$$(أ) 0,225 \quad (ب) 0,375 \quad (ج) 0,96 \quad (د) 0,6$$

٨٩) حسب الوسط الحسابي للمتغير س فكان (٦٠) وحسب الوسط الحسابي للمتغير ص فكان (٧٠) وكان معادلة الانحدار ص على س هي ص = $\frac{1}{3}س + أ$ فإن قيمة أ تساوي:

- (أ) ٢٠ (ب) ٦٠ (ج) ٥٠ (د) ٣٦,٦٧

٩٠) إذا كانت معادلة خط الانحدار لعلامات الفيزياء ص على علامات الرياضيات س هي ص = $\frac{1}{3}س + ٥٠$ فإذا كانت علامة طالب في الرياضيات ٩٠ فإن علامة هذا الطالب

المتنبأ بها في الفيزياء تساوي:

- (أ) ٣٠ (ب) ٩٠ (ج) ٨٠ (د) ٥٠

٩١) إذا كان (س، ص) متغيرين بحيث أن لهما نفس الانحراف المعياري وأن معامل الارتباط بينهما يساوي (٠,٥) وأن $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٩٠$ فإن الانحراف المعياري للمتغير س يساوي:

- (أ) ٣ (ب) ٠,٢٥ (ج) $\frac{2}{9}$ (د) غير ذلك

٩٢) لإيجاد معادلة خط الانحدار ص = أ س + ب وجد أن $\bar{س} = ٦٠$ ، $\bar{ص} = ٨٥$ ، ب = ١٥ فإن قيمة أ تساوي:

- (أ) ١ (ب) $\frac{1٥}{٦٥}$ (ج) $\frac{1٥}{٦٠}$ (د) $\frac{٦٠}{٧٥}$

٩٣) إذا كانت معادلة الانحدار ص على س هي ص = $٠,٣٦س + ١٧$ ومعادلة الانحدار س على ص هي س = $٣ - ٠,٣٦ص$ فإن معامل الارتباط بيرسون يساوي:

- (أ) ٠,٣٦ (ب) -٠,٣٦ (ج) ٠,٦ (د) -٠,٦

٩٤) إذا كانت معادلة الانحدار $(\frac{ص}{س})$ هي: ص = $٢س + ١١$ ومعادلة الانحدار $(\frac{س}{ص})$ هي س =

$\frac{1}{٥}ص + ٢٠$ فإن الوسط الحسابي للمتغير س يساوي:

- (أ) ١١ (ب) ٢٠ (ج) ٨٥ (د) ٣٧

٩٥) لديك معاملات ارتباط هي: $ر_١ = ٠,٣$ ، $ر_٢ = ٠,٨٩$ ، $ر_٣ = ٠,٨$ ، $ر_٤ = ٠,٩٢$ فإن معامل الارتباط الذي يعبر عن أقوى علاقة هو:

- (أ) $ر_١$ (ب) $ر_٢$ (ج) $ر_٣$ (د) $ر_٤$

*** ليكن لدينا التجربة هي إلقاء حجر نرد مرتين إذا كان:

الحادث أ = مجموع العددين الظاهرين أكبر من ١٠.

الحادث ب = مجموع العددين الظاهرين يقبل القسمة على ٥.

الحادث ج = الفرق المطلق بين العددين الظاهرين = ٥.

الحادث د = الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يقبل القسمة على ٣.

اعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (٩٦-٩٩)

٩٦ الحادث ب هو

(أ) $\{(٤,١), (١,٤), (٢,٣)\}$

(ب) $\{(١,٤), (٤,١), (٣,٢), (٢,٣), (٤,٦), (٦,٤), (٥,٥)\}$

(ج) $\{(١,٤), (٤,١), (٣,٢), (٥,٢), (٥,٥)\}$

(د) $\{(١,٤), (٦,٤), (٤,٦), (٥,٥)\}$

٩٧ عدد عناصر الحادث د هو:

(أ) ١٤ (ب) ٨

(ج) ١٣

(د) غير ذلك

٩٨ احتمال الحادث ج يساوي:

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{1}{18}$

(ج) $\frac{1}{6}$

(د) $\frac{2}{9}$

٩٩ عدد عناصر الحادث أ يساوي:

(أ) ٦ (ب) ٣

(ج) ١٠

(د) ١٢

١٠٠ صندوق فيه كرتان حمراوان و(٣) كرات زرقاء فإن عدد عناصر الحادث أ الذي يمثل

سحب (٣) كرات على التوالي دون إرجاع يساوي:

(أ) ٦٠ (ب) ١٠

(ج) ٢٠

(د) ١٢٥

١٠١ صندوق به (٧) مصابيح، (٤) منها سليمة سحب ثلاثة مصابيح على التوالي دون

إرجاع فإن عدد عناصر الحادث الذي يمثل ظهور أحدها سليم والآخرين تالفان

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(ج) ٣٥

(د) ٤

*** إذا كان نسبة الذين يتحدثون الإنجليزية في مجتمع ما يساوي (٦٠٪) والذين

يتحدثون الفرنسية في نفس المجتمع (٥٠٪) والذين يتحدثون اللغتين معا

(٢٠٪) اختير شخص بشكل عشوائي

فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (١٠٢-١٠٥)

(١٠٢) احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية:

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٨

(١٠٣) احتمال أن يتحدث إحدى اللغتين على الأقل:

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٤ (د) ٠,١

(١٠٤) احتمال أن يتحدث الفرنسية ولا يتحدث الإنجليزية:

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٤ (ج) ٠,٣ (د) ٠,١

(١٠٥) احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية ولا يتحدث الفرنسية:

(أ) ٠,٩ (ب) ٠,٨ (ج) ٠,١ (د) ٠,٢

(١٠٦) كيس به (٧) كرات حمراء ، (٥) كرات سوداء سحبت من الكيس (٣) كرات على

التوالي دون إرجاع فإن احتمال الحصول على كرتين حمراوين يساوي:

(أ) ٠,٤٢٥ (ب) ٠,٤٧٧ (ج) ٠,٦ (د) ٠,٣٨١

(١٠٧) إذا كان ح (أ) = ٠,٤ ح (ب) = ٠,٣ وكان أ، ب حدثين منفصلين في الفضله العيني

Ω فإن ح (أ ∪ ب) يساوي:

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٦ (ج) ٠,٧ (د) ٠,٥٨

(١٠٨) إذا كان ح (أ) = ٢ ح (ب) = ٣ ح (أ) كانت الحوادث أ، ب، أ ∪ ب حوادث متباعدة

وشاملة في Ω فإن ح (أ ∪ ب) يساوي:

(أ) $\frac{7}{11}$ (ب) $\frac{3}{11}$ (ج) $\frac{2}{11}$ (د) $\frac{1}{2}$

(١٠٩) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في Ω وكان ح (أ) = ٢ ح (ب)، ح (أ ∪ ب) = $\frac{5}{8}$

فإن ح (أ) يساوي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

(١١٠) ليكن أ، ب حدثين في Ω بحيث أن ح (أ) = ٠,٦٥ ح (ب) = ٠,٨

ح (أ ∩ ب) = ٠,٥٥ فإن ح (أ ∪ ب) =

(أ) $\frac{11}{16}$ (ب) $\frac{5}{16}$ (ج) $\frac{11}{13}$ (د) $\frac{5}{13}$

(١١١) س متغير عشوائي لتوزيع ذات الحدين، ت (س) = ٣ وكان احتمال نجاح التجربة

في المرة الواحدة (٢٥،٠ ن) حيث ن عدد مرات إجراء التجربة فإن قيمة ن تساوي:

(أ) ١٤٤ (ب) ١٢ (ج) ٩ (د) ٨

(١١٢) إحدى شركات الكمبيوتر، ترسل رسائل عبر شبكة الإنترنت ، فإذا كان احتمال وجود خطأ في آية رسالة ٢٪ وأرسلت الشركة في إحدى الأيام (١٠٠٠) رسالة ما احتمال عدم وجود خطأ في (٢٠) رسالة :

(أ) ٠,٦٦٧ (ب) ٠,١١ (ج) صفر (د) غير ذلك

(١١٣) تقدم طالب لامتحانين في الرياضيات والعلوم، فإذا كان احتمال نجاحه في الرياضيات ٠,٧ واحتمال نجاحه في العلوم إذا نجح في الرياضيات ٠,٨ فإن احتمال نجاحه في المادتين معا يساوي:

(أ) ٠,٨٧٥ (ب) ٠,٥٦ (ج) ٠,٩٤ (د) ٠,٤٤

*** الجدول التالي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير س

س	٢	٤	٦
ح(س)	١	٣	ب

وكانت (س) = ٤

اعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (١١٤-١١٥)

(١١٤) قيمة أ تساوي:

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٢ (ج) ٠,٣ (د) المعلومات غير كافية .

(١١٥) قيمة ب تساوي:

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (ج) ١ (د) ٠,٢-

(١١٦) إذا كانت تجربة إلقاء قطعة نقد غير متزنة واحتمال ظهور الصورة ثلاثة أمثـل ظهور الكتابة فإن احتمال ظهور الكتابة يساوي:

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

(١١٧) محل لبيع الألبسة يربح في الأيام العلية (١٠) دينار وفي الأيام الماطرة يخسر (٥) دينار وفي أيام الأعياد والمناسبات يربح (١٠٠) دينار فإذا علمت بأن النسبة المئوية للأيام العلية (٦٠٪) وللأيام الماطرة (١٠٪) ولأيام الأعياد والمناسبات (٣٠٪) اختبر أحد الأيام بشكل عشوائي فإن توقع ربحه في ذلك اليوم بالدينار يساوي:

١١٨) إذا كان من متغير ذات الحدين بحيث أن $n=20$ ، $b=\frac{1}{0}$ فإن تباین من يساوي:

١) ٤ (ب) ٢ (ح) $\frac{4}{0}$ (د) $\frac{16}{0}$

١١٩) إذا كان من متغير ذات الحدين بحيث أن $n=4$ ، $b=\frac{1}{4}$ فإن ح (س) = (٢) =

١) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$ (ح) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{16}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{16}$

١٢٠) الرقم القياسي عبارة عن:

- أ) عدد نقارن به التغير المطلوب الذي يصيب ظاهرة ما
- ب) عدد نقارن به التغير العشوائي لظاهرة ما
- ح) عدد نقارن به التغيرات الأخيرة التي أصابت ظاهرة ما.
- د) عدد نقارن به التغير النسبي الذي يصيب ظاهرة أو عدة ظواهر نظرا لاختلاف الزمان أو المكان.

*** اعتمد على الجدول التالي في الإجابة عن الأسئلة (١٢١-١٢٣) معتبرا سنة ١٩٩٥

هي الأساس

السلعة	السعر عام ١٩٩٥	السعر عام ١٩٩٧	الكمية عام ١٩٩٥	الكمية عام ١٩٩٧
أ	٥	١٠	١٠٠	١٠٠
ب	١٠	١٠	٢٠٠	١٠٠
ح	٢٠	٢٠	١٠٠	٢٠٠
د	٤٠	٢٠	٢٠٠	٢٠٠

١٢١) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار يساوي:

١) ١٢٥% (ب) ٨٠% (ح) ٤٥٠% (د) ١٢٥%

١٢٢) رقم لاسبير للكميات يساوي:

١) ١٠٨% (ب) ٨٠% (ح) ٧٢% (د) ٧٤%

١٢٣) رقم باش للأسعار يساوي:

١) ٧٤% (ب) ٧٢% (ح) ٨٠% (د) ١٠٨%

١٢٤) السلسلة الزمنية هي:

أ) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت بطريقة عشوائية

(ب) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت على فترات زمنية متتالية.

(ح) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت في زمن واحد

(د) مجموعة من المشاهدات الإحصائية أخذت بطريقة منتظمة.

(١٢٥) سلسلة زمنية عدد عناصرها (١٥٧) فإن عدد الأوساط المتحركة بطول (١٥) يساوي

(أ) ١٤٢ (ب) ١٥ (ج) ١٤١ (د) ١٤٣

(١٢٦) في السلسلة الزمنية (١، ٣، ٦، ٩، ١٨، ١٥) فإن المعدل المتحرك الثالث بطول (٣) يساوي:

(أ) ٣,٣٣ (ب) ١١ (ج) ٦ (د) ١٤

(١٢٧) معامل الخشونة للسلسلة الزمنية (٣، ٣، ٣) يساوي:

(أ) ١,٣٥ (ب) ٤,٠٥ (ج) ١,٨ (د) ١,٨-

(١٢٨) المعادلة التالية $س = ٠,٩١ ن + ٥,٩١$ تمثل معادلة الانحدار العام لميزانية التعليم العالي

إذا علمت بأن بداية التقدير هي سنة ١٩٨٦ فإن الميزانية التقديرية عام ٢٠٠١ تساوي:

(أ) ١٩,٥٦ (ب) ١٣,٦٥ (ج) ٢٠,٤٧ (د) ١٤,٥٦

(١٢٩) من أسباب التحرك السكاني:

(أ) الوضع الاقتصادي (ب) الموقع الجغرافي

(ج) أسباب قسرية كالخروب (د) جميع ما ذكر

(١٣٠) إذا كان عدد المهاجرين لبلد ما يساوي (مليون) مهاجر وعدد المهاجرين منه يساوي

(٣) ملايين مهاجر وعدد الوفيات فيه (مليون ونصف) وعدد المواليد (٣) مليون

فيذا كان عدد سكان هذا البلد في منتصف العام يساوي (٧٥) مليون فإن معدل

الزيادة الطبيعية تساوي:

(أ) ٦,٦٧ لكل ألف (ب) ٢٠ لكل ألف (ج) ١٣,٣٣ لكل ألف (د) ٤٦,٦٧ لكل ألف

(١٣١) إذا كان عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة (١٢٥٠٠) وعدد المواليد أحياء

(٢٢٥٠٠٠) طفل فإن معدل وفيات الأمومة تساوي:

(أ) ٥,٥٥ لكل ألف (ب) ٥٥٥,٥٥ لكل ألف (ج) ٥٥,٥٥ لكل ألف (د) ١٨ لكل ألف

(١٣٢) إذا كان عدد المواليد أحياء في بلد ما هو (٢٤٠٠٠) وكان عدد السكان في ١٩٧٠/٧/١

يساوي (٢٤) مليون فإن معدل الولادة الخام يساوي :

(أ) ١ لكل ألف (ب) ١٠ لكل ألف (ج) ١٠٠ لكل ألف (د) غير ذلك

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية:

- ١- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض: (مقدمة في الإحصاء)، دار جون وايلي وأبنائه، نيويورك، الطبعة الأولى، ١٩٨٢.
- ٢- د. زياد رمضان: (مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي)، الطبعة الثالثة، ١٩٨٣.
- ٣- د. موراي ر. شيبجل، ترجمة د. شعبان عبد الحميد: (نظريات ومسائل في الإحصاء)، دار ماكجروهيل للنشر، ١٩٧٢.
- ٤- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض: (مبادئ الإحصاء) دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الأولى، ١٩٨٢.
- ٥- كامل فليفل، فتحي حمدان: (مبادئ الإحصاء للمهن التجارية)، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الثالثة، ١٩٩٩.
- ٦- محمد حسين محمد رشيد: (الإحصاء في التربية)، دار الصفاء للنشر، عمان، الطبعة الأولى، ٢٠٠٢.
- ٧- د. يحيى سعد زغلول: (مقدمة في الإحصاء التطبيقي)، الدار الجامعية، بيروت، ١٩٨٨.
- ٨- د. عبدالعزيز فهمي هيكل، د. يحيى سعد زغلول: (التحليل الإحصائي)، الدار الجامعية، بيروت، ١٩٨٦.
- ٩- سيمور ليبشتز: (نظريات ومسائل في الاحتمالات) دار ماكجروهيل للنشر ترجمة د. سلهح داود، الطبعة العربية، ١٩٧٧.
- ١٠- عوض منصور، عزام صبري، محمد القادري، عبد الرحمن سالم: (مبادئ الإحصاء)، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، ٢٠٠١.

المراجع الأجنبية :

- 1- Chase, C.L. Elementary Statistical Procedures , Third Edition, Mc Graw-Hill, Book co. New York, 1984.
- 2- William Mendenhall, Introduction to probability and statistics, four edition, 1969.
- 3- Hays, W.L "Statistics for the Social Science, 3rd edition, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- 4- STATISTICAL Reasoning in Psychology and education, 2nd edition, John Wiley & sons 1978.

الملاحق

جدول الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65258	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21681	91157	77331	60710	52290	16835	48633	71390	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	78547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75986
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
86181	78949	86601	46258	00477	25234	09903	36574	72139	70185
54308	21154	97810	86764	82869	11785	35261	59009	38714	38723
65541	34371	09591	07889	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05325
53298	90276	62545	21944	16580	03878	07516	95715	02526	33537

2. جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$Z: N(0, 1)$$

المساحة المظلة تمثل $P(0 < Z < z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3688	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

أُخذت البيانات في هذا الجدول من كتاب «مبادئ الإحصاء لعلماء العلوم الإدارية والاقتصاد» تأليف هويل وجيسن.

The data in this table are extracted from Table IV from Hoel and Jessen, *Basic Statistics for Business and Economics*, 2nd ed., (1977), John Wiley Sons.

